

IV

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Е.М.ЛИФШИЦ, Л.П.ПИТАЕВСКИЙ

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ
КВАНТОВАЯ
ТЕОРИЯ

ЧАСТЬ
2



Цена 79 коп.

Книга является второй частью четвертого тома получившего широкую известность как у нас, так и за границей, Курса теоретической физики академика Л. Д. Ландау и члена-корреспондента АН СССР Е. М. Лифшица.

В части 2 книги излагаются радиационные поправки в электродинамике, теория слабых взаимодействий и некоторые вопросы теории сильных взаимодействий.

Этим томом издательство продолжает последовательное издание всего курса теоретической физики, который будет состоять из девяти томов.

Курс теоретической физики академика Л. Д. Ландау и члена-корреспондента АН СССР Е. М. Лифшица будет состоять из следующих девяти томов:

1. Механика
2. Теория поля
3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория
4. Релятивистская квантовая теория (в двух частях)
5. Статистическая физика
6. Гидродинамика
7. Теория упругости
8. Электродинамика сплошных сред
9. Физическая кинетика

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

Е. М. ЛИФШИЦ, Л. П. ПИТАЕВСКИЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ТОМ IV

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Часть 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава XI. Точные пропагаторы и вершинные части	9
§ 99. Операторы полей в гейзенберговском представлении	9
§ 100. Точный фотонный пропагатор	12
§ 101. Собственно-энергетическая функция фотона	19
§ 102. Точный электронный пропагатор	23
§ 103. Вершинный оператор	28
§ 104. Уравнения Дайсона	32
§ 105. Тождество Уорда	35
§ 106. Электронный пропагатор во внешнем поле	38
§ 107. Физические условия перенормировки	44
§ 108. Аналитические свойства фотонного пропагатора	51
§ 109. Регуляризация интегралов Фейнмана	55
Глава XII. Радиационные поправки	60
§ 110. Вычисление поляризационного оператора	60
§ 111. Радиационные поправки к закону Кулона	64
§ 112. Вычисление мнимой части поляризационного оператора по интегралу Фейнмана	67
§ 113. Электромагнитные формфакторы электрона	72
§ 114. Вычисление формфакторов электрона	76
§ 115. Аномальный магнитный момент электрона	81
§ 116. Вычисление массового оператора	83
§ 117. Испускание мягких фотонов с ненулевой массой	89
§ 118. Рассеяние электрона во внешнем поле во втором борновском приближении	95
§ 119. Радиационные поправки к рассеянию электрона во внешнем поле	101
§ 120. Радиационное смещение атомных уровней	105
§ 121. Радиационное смещение уровней мезоатомов	112
§ 122. Релятивистское уравнение для связанных состояний	114
§ 123. Двойное дисперсионное соотношение	121
§ 124. Рассеяние фотона на фотоне	128
§ 125. Когерентное рассеяние фотона в поле ядра	138
§ 126. Радиационные поправки к уравнениям электромагнитного поля	140
§ 127. Вычисление интегралов по четырехмерным областям	149
Глава XIII. Асимптотические формулы квантовой электродинамики	154
§ 128. Асимптотическое поведение фотонного пропагатора при больших импульсах	154
§ 129. Выделение дважды логарифмических членов в вершинном операторе	161
§ 130. Дважды логарифмическая асимптотика вершинного оператора	167
§ 131. Дважды логарифмическая асимптотика амплитуды рассеяния электрона на мюоне	170

Евгений Михайлович Лифшиц, Лев Петрович Питаевский.

Релятивистская квантовая теория, ч. 2

М., 1971 г., 283 стр. с илл.

Редактор *Б. С. Горобец*

Техн. редактор *Н. Ш. Аксельрод* Корректоры *Т. С. Плетнева, Г. С. Смоликова*

Сдано в набор 10/XII 1970 г. Подписано к печати 20/IV 1971 г. Бумага 69×90¹/₁₆.
Физ. печ. л. 18. Условн. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 17,23. Тираж 41 000 экз.
Т-06546. Цена книги 79 коп. Заказ № 894.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР, Измайловский проспект, 29.

Глава XIV. Динамическая симметрия адронов	178
§ 132. Изомультиплеты	178
§ 133. Гиперзаряд	181
§ 134. Метастабильные адроны	184
§ 135. G-четность	190
§ 136. Унитарная симметрия SU(3)	192
§ 137. Супермультиплеты	197
§ 138. Суперспинорные операторы	203
Глава XV. Электродинамика адронов	207
§ 139. Электромагнитные формфакторы адронов	207
§ 140. Рассеяние электронов адронами	213
§ 141. Низкоэнергетическая теорема для тормозного излучения	216
§ 142. Низкоэнергетическая теорема для рассеяния фотона на адроне	221
§ 143. Мультипольные моменты адронов	224
§ 144. Изотопические свойства электромагнитных формфакторов адронов	229
Глава XVI. Слабое взаимодействие	232
§ 145. Слабое взаимодействие лептонов	232
§ 146. Распад мюона	238
§ 147. Радиационные поправки к распаду мюона	243
§ 148. Кинематическая структура адронного слабого тока	248
§ 149. Вещественность формфакторов	254
§ 150. Изотопические свойства адронного слабого тока	257
§ 151. β -распад нейтрона	261
§ 152. Токи переходов в супермультиплете	265
§ 153. Кинематическая структура амплитуд нелептонных распадов	269
§ 154. Нейтральные K-мезоны	272
Дополнение к части I	276
§ 82а. Ионизационные потери быстрых частиц	276
Поправки к части I	284
Предметный указатель	288

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — непосредственное продолжение первой части (написанной нами совместно с В. Б. Берестецким), и потому имеет с ней непрерывную нумерацию глав и параграфов.

Первые три главы посвящены теории радиационных поправок и завершают, таким образом, изложение квантовой электродинамики. И здесь мы стремились не только подчеркнуть принципиальные основы применяемых методов, но и выявить существенные технические детали; поэтому конкретные вычисления излагаются со сравнительно большой степенью подробности.

Уже по первоначальному замыслу Л. Д. Лапдау, в этом курсе должны излагаться лишь те из теоретических результатов, которые с разумной степенью уверенности представляются надежно установленными и укладываются в определенную систему. Другими словами, изложение не должно слишком близко приближаться к «переднему краю» теоретической физики. Применение этого критерия в настоящее время, конечно, в особенности затруднительно в такой области, как теория слабых и сильных взаимодействий. К тому же разложение отдельных разрозненных сведений вряд ли было бы полезно для тех, кто специально интересуется этой областью, и не могло бы быть интересным для других. Исходя из этих соображений, мы решили ограничиться в этой книге лишь малым: динамической симметрией сильных взаимодействий и «феноменологической» теорией слабых взаимодействий. Мы надеемся, что и при таком ограниченном содержании книга все же сможет оказаться полезной достаточно широкому кругу читателей.

Как и в других томах этого курса, приведенные в книге дополнительные литературные ссылки ни в какой степени не претендуют на полноту и не имеют приоритетного характера. Их

цель состоит лишь в том, чтобы дать указания на материал, несколько выходящий за пределы изложения в тексте, но близкий к нему. И в этом отношении специфика предмета делает отбор таких указаний затруднительным и неоднозначным.

Ссылки на другие тома этого курса снабжены цифрами: I («Механика», 1965), II («Теория поля», 1967), III («Квантовая механика», 1963).

Мы хотели бы выразить здесь нашу благодарность Б. Л. Иоффе и И. С. Шапиро, просмотревшим книгу и сделавшим ряд полезных замечаний. Мы благодарны также за некоторые советы Я. И. Азимову и А. А. Варфоломееву. При изложении теории слабых взаимодействий мы извлекли много пользы из известной книги Л. Б. Окуня.

Август 1969 г.

*Е. М. Лифшиц,
Л. П. Питаевский*

ГЛАВА XI

ТОЧНЫЕ ПРОПАГАТОРЫ И ВЕРШИННЫЕ ЧАСТИ

§ 99. Операторы полей в гейзенберговском представлении

До сих пор при рассмотрении различных конкретных электродинамических процессов мы ограничивались первым неисчисляющим приближением теории возмущений. Мы перейдем теперь к изучению эффектов, возникающих при учете высших приближений. Эти эффекты носят название *радиационных поправок*.

Более глубокое понимание структуры высших приближений может быть достигнуто на основе предварительного изучения некоторых общих свойств, которыми обладают точные (т. е. не разложенные по степеням e^2) амплитуды рассеяния. Мы видели (§ 73), что последовательные члены ряда теории возмущений выражаются через операторы полей в представлении взаимодействия — операторы, временная зависимость которых определяется гамильтонианом системы свободных частиц H_0 . Точные же амплитуды рассеяния более удобно выражать через операторы поля не в этом, а в гейзенберговском представлении, в котором зависимость от времени определяется сразу точным гамильтонианом системы взаимодействующих частиц $H = H_0 + V$.

По общему правилу составления гейзенберговских операторов имеем

$$\psi(x) \equiv \psi(t, \mathbf{r}) = e^{iHt} \psi(\mathbf{r}) e^{-iHt} \quad (99,1)$$

и также для $\bar{\psi}(x)$ и $A(x)$, причем $\psi(\mathbf{r}), \dots$ — не зависящие от времени (шредингеровские) операторы¹⁾. Сразу же отметим, что гейзенберговские операторы, взятые в одинаковые моменты времени, удовлетворяют тем же правилам коммутации, что и операторы в шредингеровском представлении или в представлении

¹⁾ В этой главе операторы с временным аргументом будут относиться к гейзенберговскому представлению, а операторы в представлении взаимодействия будем отличать еще и дополнительным индексом int.

взаимодействия. Действительно, имеем, например,

$$\{\Psi_i(t, \mathbf{r}) \bar{\Psi}_k(t, \mathbf{r}')\}_+ = e^{iHt} \{\Psi_i(\mathbf{r}) \bar{\Psi}_k(\mathbf{r}')\}_+ e^{-iHt} = \gamma_{ik}^0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (99,2)$$

(ср. (76,6)). Аналогичным образом операторы $\Psi(t, \mathbf{r})$ и $A(t, \mathbf{r}')$ коммутативны:

$$\{\Psi_i(t, \mathbf{r}) A(t, \mathbf{r}')\}_- = 0$$

(в различные моменты времени это уже отнюдь не так!).

«Уравнение движения», которому удовлетворяет гейзенберговский Ψ -оператор, можно получить по общей формуле III(13,7):

$$-i \frac{\partial \Psi(x)}{\partial t} = H \Psi(x) - \Psi(x) H. \quad (99,3)$$

Для гамильтониана шредингеровское и гейзенберговское представления тождественны, причем гамильтониан выражается одинаковым образом через операторы полей в обоих этих представлениях. В данном случае при вычислении правой стороны в (99,3) можно опустить в гамильтониане часть, зависящую только от оператора $A(x)$ (гамильтониан свободного электромагнитного поля), поскольку эта часть коммутативна с $\Psi(x)$. Согласно (21,13) и (43,3) имеем

$$\begin{aligned} H = \int \Psi^*(t, \mathbf{r}) (\alpha \mathbf{p} + \beta m) \Psi(t, \mathbf{r}) d^3x + \\ + e \int \bar{\Psi}(t, \mathbf{r}) \hat{A}(t, \mathbf{r}) \Psi(t, \mathbf{r}) d^3x = \\ = \int \bar{\Psi}(t, \mathbf{r}) \{ \gamma \mathbf{p} + m + e \hat{A}(t, \mathbf{r}) \} \Psi(t, \mathbf{r}) d^3x. \end{aligned} \quad (99,4)$$

Вычисляя коммутатор $\{H \Psi(t, \mathbf{r})\}_-$ с помощью (99,2) и устранив δ -функцию интегрированием по d^3x , получим

$$(\hat{\mathbf{p}} - e \hat{A} - m) \Psi(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (99,5)$$

Как и следовало ожидать, оператор $\Psi(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению, формально совпадающему с уравнением Дирака.

Уравнение же для оператора электромагнитного поля $A(t, \mathbf{r})$ заранее очевидно из соответствия с классическим случаем. В условиях осуществления этого случая (большие числа заполнения — см. § 5), после усреднения по состоянию поля операторное уравнение должно перейти в классическое уравнение Максвелла для потенциалов II(30,2). Поэтому ясно, что уравнение для оператора просто совпадает по форме с уравнением Максвелла, т. е. (при произвольной калибровке) имеем

$$\partial^\nu \partial_\mu A^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\mu A^\nu(x) = -4\pi e j^\nu(x) \quad (99,6)$$

где $j^\nu(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\nu \Psi(x)$ — оператор тока, тождественно удовлетворяющий уравнению непрерывности¹⁾

$$\partial_\nu j^\nu(x) = 0. \quad (99,7)$$

Существенно, что уравнения (99,6) линейны по A^μ и j^μ , и потому не возникает вопроса порядке следования этих операторов.

Как и аналогичные уравнения для волновых функций, система операторных уравнений (99,6—7) инвариантна относительно калибровочного преобразования

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x), \quad \Psi(x) \rightarrow \Psi(x) e^{iex}, \quad \bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) e^{-iex}, \quad (99,8)$$

где $\chi(x)$ — произвольный вещественный оператор, коммутирующий (в одинаковый момент времени) с Ψ^2 .

Установим теперь связь между операторами в гейзенберговском представлении и в представлении взаимодействия. Для упрощения рассуждений удобно сделать формальное предположение (не скрывающееся на окончательном результате), что взаимодействие $V(t)$ адиабатически «включается» от $t = -\infty$ к конечным временам. Тогда при $t \rightarrow -\infty$ оба представления — гейзенберговское и представление взаимодействия — просто совпадают. Совпадают и соответствующие волновые функции системы Φ и Φ_{int} :

$$\Phi_{\text{int}}(t = -\infty) = \Phi. \quad (99,9)$$

С другой стороны, волновая функция в гейзенберговском представлении от времени вообще не зависит (вся временная зависимость перенесена на операторы), а в представлении взаимодействия для зависимости волновой функции от времени имеем согласно (73,7)

$$\Phi_{\text{int}}(t) = S(t, -\infty) \Phi_{\text{int}}(-\infty), \quad (99,10)$$

где³⁾

$$S(t_2, t_1) = T \exp \left\{ -i \int_{t_1}^{t_2} V(t') dt' \right\}. \quad (99,11)$$

¹⁾ Операторы же $A_{\text{int}}^\mu(x)$, отвечающие свободному электромагнитному полю, удовлетворяют такому же уравнению без правой части:

$$\partial^\nu \partial_\mu A_{\text{int}}^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\mu A_{\text{int}}^\nu(x) = 0. \quad (99,6a)$$

²⁾ Подчеркнем, что здесь идет речь именно о гейзенберговских Ψ -операторах. В представлении взаимодействия калибровочное преобразование электромагнитных потенциалов вообще не затрагивает Ψ -операторов.

³⁾ Отметим очевидные свойства S :

$$\begin{aligned} S(t, t_1) S(t_1, t_0) &= S(t, t_0), \\ S(t, t_0) S(t_0, t) &= 1. \end{aligned} \quad (99,11a)$$

Сравнив (99,10) с (99,9), найдем соотношение

$$\Phi_{\text{int}}(t) = S(t, -\infty)\Phi, \quad (99,12)$$

устанавливающее связь между волновыми функциями в обоих представлениях. Соответственно формула преобразования операторов:

$$\begin{aligned} \Psi(t, \mathbf{r}) &= S^{-1}(t, -\infty)\Psi_{\text{int}}(t, \mathbf{r})S(t, -\infty) = \\ &= S(-\infty, t)\Psi_{\text{int}}(t, \mathbf{r})S(t, -\infty) \end{aligned} \quad (99,13)$$

(то же самое для $\bar{\Psi}$ и A).

Сделаем в заключение еще одно общее замечание. Мы уже неоднократно указывали, что в релятивистской квантовой теории физический смысл операторов поля весьма ограничен из-за бесконечности нулевых флуктуаций. Это тем более относится к операторам в гейзенберговском представлении, которые фактически содержат в себе еще и расходимости, связанные с взаимодействием. В этой главе §§ 99—106 посвящены изложению формальной теории, в которой вопросы устранения этих бесконечностей не обсуждаются и действия со всеми величинами производятся так, как если бы они были конечными. Получаемые таким образом результаты имеют главным образом эвристическую ценность: они позволяют более глубоко уяснить смысл разложений теории возмущений; возможно также, что они сохранятся в каком-то виде и в будущей теории, свободной от нынешних затруднений¹⁾.

§ 100. Точный фотонный пропагатор

Основную роль в аппарате точной (не разложенной по степеням e^2) теории играют понятия о точных пропагаторах²⁾.

Точный фотонный пропагатор (который мы будем обозначать буквой \mathcal{D} рукописного шрифта) определяется формулой

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|T A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')|0\rangle, \quad (100,1)$$

в которой $A_{\mu}(x)$ — гейзенберговские операторы, в отличие от определения (77,1):

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|T A_{\mu}^{\text{int}}(x) A_{\nu}^{\text{int}}(x')|0\rangle, \quad (100,2)$$

в котором фигурировали операторы в представлении взаимодействия. В отличие от точного пропагатора (100,1), функцию (100,2) можно назвать *пропагатором свободных фотонов*.

¹⁾ Наконец, развиваемый здесь математический аппарат находит себе применение и в квантовой статистической физике, где характерные для теории поля расходимости вообще не возникают.

²⁾ Эти понятия были впервые введены Дайсоном (F. Dyson, 1949); им же в основном построен весь излагаемый в этой главе аппарат.

Ввиду невозможности точного вычисления среднего значения (100,1) нельзя получить точное аналитическое выражение для $\mathcal{D}_{\mu\nu}$, хотя определение (100,1) и позволяет установить некоторые общие свойства этой функции. Этому будет посвящен § 108, а пока мы займемся вычислением $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ по теории возмущений, с помощью диаграммной техники. Для этого надо выразить $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ через операторы в представлении взаимодействия.

Пусть сначала $t > t'$. Используя связь между $A(x)$ и $A_{\text{int}}(x)$ (ср. (99,13)), пишем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') &= i\langle 0|A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')|0\rangle = \\ &= i\langle 0|S(-\infty, t) A_{\mu}^{\text{int}}(x) S(t, -\infty) S(-\infty, t') A_{\nu}^{\text{int}}(x') S(t', -\infty)|0\rangle. \end{aligned}$$

Согласно (99,11a) заменяем

$$\begin{aligned} S(t, -\infty) S(-\infty, t') &= S(t, t'), \\ S(-\infty, t) &= S(-\infty, +\infty) S(+\infty, t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') &= \\ &= i\langle 0|S^{-1}[S(+\infty, t) A_{\mu}^{\text{int}}(x) S(t, t') A_{\nu}^{\text{int}}(x') S(t', -\infty)]|0\rangle, \end{aligned} \quad (100,3)$$

где для краткости обозначено

$$S \equiv S(+\infty, -\infty). \quad (100,4)$$

Поскольку по определению (99,11) $S(t_2, t_1)$ содержит только операторы в моменты времени между t_1 и t_2 , расположенные в хронологическом порядке, то очевидно, что вообще все операторные множители в квадратной скобке в (100,3) расположены в порядке убывания времен слева направо. Поставив перед скобкой символ хронологизации T , мы можем затем произвольно переставлять порядок множителей, так как оператор T автоматически устанавливает их в нужном порядке. Воспользовавшись этим перепишем скобку в виде

$$\begin{aligned} [\dots] &= T[A_{\mu}^{\text{int}}(x) A_{\nu}^{\text{int}}(x') S(+\infty, t) S(t, t') S(t', -\infty)] = \\ &= T[A_{\mu}^{\text{int}}(x) A_{\nu}^{\text{int}}(x') S]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|S^{-1}T[A_{\mu}^{\text{int}}(x) A_{\nu}^{\text{int}}(x') S]|0\rangle. \quad (100,5)$$

Легко убедиться аналогичным образом, что эта формула верна и при $t < t'$.

Покажем теперь, что множитель S^{-1} можно вынести из-под знака усреднения по вакууму в виде некоторого фазового множителя. Для этого вспомним, что гейзенберговская волновая функция вакуума Φ совпадает со значением $\Phi_{\text{int}}(-\infty)$ волновой функции этого же состояния в представлении взаимодействия

(см. (99,9)). Согласно же (73,8) имеем

$$S\Phi_{\text{int}}(-\infty) \equiv S(+\infty, -\infty)\Phi_{\text{int}}(-\infty) = \Phi_{\text{int}}(+\infty).$$

Но вакуум представляет собой строго стационарное состояние; в нем не возможны никакие самопроизвольные процессы рождения частиц. Другими словами, с течением времени вакуум остается вакуумом; это означает, что $\Phi_{\text{int}}(+\infty)$ может отличаться от $\Phi_{\text{int}}(-\infty)$ лишь некоторым фазовым множителем $e^{i\alpha}$. Поэтому

$$S\Phi_{\text{int}}(-\infty) = e^{i\alpha}\Phi_{\text{int}}(-\infty) = \langle 0|S|0\rangle \Phi_{\text{int}}(-\infty). \quad (100,6)$$

или, произведя комплексное сопряжение и учтя унитарность оператора S , получим

$$\Phi_{\text{int}}^*(-\infty)S^{-1} = \langle 0|S|0\rangle^{-1}\Phi_{\text{int}}^*(-\infty).$$

Отсюда ясно, что выражение (100,5) может быть переписано в виде

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i \frac{\langle 0|T A_{\mu}^{\text{int}}(x) A_{\nu}^{\text{int}}(x') S|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \quad (100,7)$$

Подставив сюда (в числитель и знаменатель) разложение (73,10) для S и произведя усреднение с помощью теоремы Вика (§ 78), мы получим разложение $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ по степеням e^2 .

В числителе (100,7) усредняемые выражения отличаются от матричных элементов рассматривавшегося в § 78 типа (78,1) лишь тем, что вместо «внешних» операторов рождения или уничтожения фотонов в них стоят операторы $A_{\mu}^{\text{int}}(x)$ и $A_{\nu}^{\text{int}}(x')$. Поскольку все множители в усредняемых произведениях стоят под знаком хронологизации, то попарные свертки этих операторов с «внутренними» операторами $A^{\text{int}}(x_1)$, $A^{\text{int}}(x_2)$, ... будут давать фотонные пропагаторы $D_{\mu\nu}$. Таким образом, результаты усреднения выразятся совокупностями диаграмм с двумя внешними концами, составляемых по описанным в § 78 правилам, с той лишь разницей, что внешним (как и внутренним) фотонным линиям диаграммы будут отвечать теперь пропагаторы $D_{\mu\nu}$ (вместо амплитуд e реальных фотонов). В нулевом приближении, при $S=1$, числитель выражения (100,7) совпадает просто с $D_{\mu\nu}(x-x')$. Следующие отличные от нуля члены будут $\sim e^2$. Они изобразятся совокупностью диаграмм, содержащих два внешних конца и две вершины:

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} + \text{---} \circlearrowright \text{---} \quad (100,8)$$

Вторая из этих диаграмм состоит из двух не связанных между собой частей: пунктирной линии (которой отвечает $-iD_{\mu\nu}$) и замкнутой петли. Такое распадение диаграммы означает распадение соответствующего ему аналитического выражения на два независимых множителя. Прибавив к диаграммам (100,8) диаграмму (линию — — — —) нулевого приближения и «вынеся ее за скобку», найдем в результате, что с точностью до членов второго порядка числитель в (100,7) равен

$$\text{---} \left\{ 1 + \circlearrowleft \right\} + \text{---} \circlearrowright \text{---}$$

Выражение же $\langle 0|S|0\rangle$ в знаменателе (100,7) представляет собой амплитуду «перехода» из вакуума в вакуум. Его разложение содержит поэтому лишь диаграммы совсем без внешних концов. В нулевом приближении $\langle 0|S|0\rangle = 1$, а с точностью до членов второго порядка получим

$$\left\{ 1 + \circlearrowleft \right\}$$

Разделив с той же точностью числитель на знаменатель, найдем, что фигурная скобка сокращается и остается

$$\text{---} \circlearrowright \text{---} + \text{---}$$

Таким образом, диаграмма с отсоединенной петлей выпадает из ответа. Этот результат имеет общий характер. Вдумавшись в способ построения диаграмм, отвечающих числителю и знаменателю в (100,7), нетрудно понять, что роль знаменателя $\langle 0|S|0\rangle$ сводится к тому, что в любом порядке теории возмущений точный пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ будет изображаться лишь диаграммами, не содержащими отделенных друг от друга частей.

Заметим, что диаграммы без внешних концов (замкнутые петли) вообще не имеют физического смысла и их не следует учитывать даже независимо от того, что они выпадают при образовании пропагатора \mathcal{D} . Действительно, сами по себе такие петли представляют собой радиационные поправки к диагональному элементу S -матрицы для перехода вакуум — вакуум. Но согласно (100,6) сумма всех этих петель (вместе с единицей нулевого приближения) дает лишь несущественный фазовый множитель, который не может отразиться ни на каких физических результатах.

Переход от координатного к импульсному представлению происходит обычным образом. Так, во втором приближении

теории возмущений пропагатор $-i\mathcal{D}_{\mu\nu}(k)$ (который мы будем изображать графически жирной пунктирной линией) дается суммой

$$\text{---} \leftarrow \text{---} \approx \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \quad (100,9)$$

где все диаграммы вычисляются по обычным правилам (перечисленным в § 78), с той лишь разницей, что внешним фотонным линиям, как и внутренним, тоже сопоставляются множители $-iD_{\mu\nu}(k)$. Аналитическая запись этой формулы дает поэтому ¹⁾

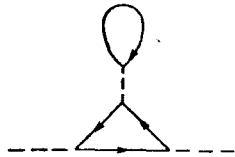
$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) \approx D_{\mu\nu}(k) + ie^2 D_{\mu\lambda}(k) \int \text{Sp } \gamma^\lambda G(p+k) \gamma^0 G(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D_{\rho\nu}(k) \quad (100,10)$$

(биспинорные индексы у матриц γ и G , как обычно, не выписываем).

Члены следующих приближений строятся аналогичным образом; они изображаются совокупностями диаграмм с двумя внешними фотонными концами и нужным числом вершин. Так, членам $\sim e^4$ отвечают следующие диаграммы с четырьмя вершинами:

$$\text{---} \leftarrow \text{---} \quad (100,11)$$

Четырьмя вершинами обладает также и диаграмма



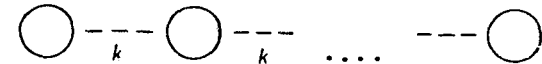
верхнюю часть которой составляет петля, образованная одной «замкнутой на себя» электронной линией ²⁾. Такая петля отвечает

¹⁾ При определении знаков не забыть о множителе -1 , приносимом замкнутой электронной петлей!

²⁾ В отличие от петли в диаграмме (100,8, б), образованной двумя различными электронными линиями.

свертке $\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$, т. е. просто среднему по вакууму значению тока: $\langle 0|j(x)|0\rangle$. Но уже по самому определению вакуума эта величина должна тождественно обращаться в нуль, и это тождество не может, разумеется, быть изменено никакими дальнейшими радиационными поправками к такой петле ¹⁾. Поэтому вообще никакие диаграммы с «замкнутыми на себя» электронными линиями не должны учитываться ни в каком приближении.

Часть диаграммы («блок»), заключенную между двумя фотонными линиями (внешними или внутренними), называют вообще *фотонной собственно-энергетической частью*. В общем случае такой блок может еще сам быть разделен на части, соединенные попарно одной фотонной линией, т. е. имеет структуру вида



где кружки обозначают блоки, которые уже нельзя разделить дальше таким способом; такие части называют *компактными* (так, из четырех собственно-энергетических частей 4-го порядка (100,11) компактны первые три).

Обозначим символом $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$ сумму всех (бесконечного множества) компактных собственно-энергетических частей; функцию $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ называют *поляризационным оператором*. Классифицируя диаграммы по числу содержащихся в них компактных частей, можно представить точный пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ в виде ряда

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

где каждому заштрихованному кружку сопоставляется $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$. Аналитически этот ряд запишется в виде

$$\mathcal{D} = D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + \dots = D \left\{ 1 + \frac{\mathcal{P}}{4\pi} \left[D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + \dots \right] \right\} \quad (100,12)$$

(тензорные индексы для краткости опущены). Но ряд в квадратных скобках вновь совпадает с рядом для \mathcal{D} . Поэтому

¹⁾ Хотя прямое вычисление по диаграммам и привело бы к расходящимся интегралам.

имеем

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\lambda}(k) \frac{\mathcal{P}^{\lambda\rho}(k)}{4\pi} \mathcal{D}_{\rho\nu}(k). \quad (100,13)$$

Умножив это равенство слева на обратный тензор $(D^{-1})^{\tau\mu}$ и справа на $(\mathcal{D}^{-1})^{\nu\sigma}$ (и изменив обозначения индексов), получим его в эквивалентном виде:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} = D_{\mu\nu}^{-1} - \frac{1}{4\pi} \mathcal{P}_{\mu\nu}. \quad (100,14)$$

Подчеркнем, что представление \mathcal{D} в виде (100,12) подразумевает, что из диаграмм можно выделить более простые блоки, которые вычисляются по общим правилам диаграммной техники, а комбинируя такие блоки друг с другом, мы получим правильные выражения для диаграмм в целом. Допустимость такого разделения составляет важную (и отнюдь не тривиальную) особенность диаграммной техники. Она связана с тем, что общий численный коэффициент в диаграмме не зависит от ее порядка.

Это же свойство позволяет использовать функцию \mathcal{D} (предполагая ее известной) для упрощения вычислений радиационных поправок к амплитудам различных процессов рассеяния: вместо того, чтобы рассматривать каждый раз заново диаграммы с различными поправками к внутренним фотонным линиям, мы можем просто заменить эти линии жирными, т. е. сопоставить им пропагаторы \mathcal{D} (вместо D), взяв их в требуемом приближении.

Если фотонная линия отвечает реальному (а не виртуальному) фотону, т. е. если она является внешним концом диаграммы в целом, то после введения в нее всех собственно-энергетических поправок мы получим, как говорят, *эффективную внешнюю линию*. Ей отвечает выражение, отличающееся от (100,13) заменой множителя D на поляризационную амплитуду реального фотона:

$$e_\mu + \mathcal{D}_{\mu\rho}(k) \frac{\mathcal{P}^{\rho\lambda}(k)}{4\pi} e_\lambda. \quad (100,15)$$

Если же речь идет о линии внешнего поля, то вместо e_μ здесь надо писать $A_\mu^{(e)}$.

Все сказанное в § 77 относительно тензорной структуры и калибровочной неоднозначности приближенного пропагатора $D_{\mu\nu}$ относится и к точной функции $\mathcal{D}_{\mu\nu}$. Оставаясь в рамках релятивистски-инвариантных представлений этой функции, напишем ее общий вид в форме

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \mathcal{D}(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \mathcal{D}^{(l)}(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}; \quad (100,16)$$

первый член отвечает калибровке Ландау, а во втором члене $\mathcal{D}^{(l)}$ — калибровочно-произвольная функция. Аналогичное представление приближенного пропагатора¹⁾:

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + D^{(l)}(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (100,17)$$

Обратные тензоры должны, по определению, удовлетворять равенствам

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} \mathcal{D}^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\lambda, \quad D_{\mu\nu}^{-1} D^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\lambda.$$

Для прямых тензоров вида (100,16) или (100,17) обратные тензоры могут быть лишь чисто поперечными:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} &= \frac{1}{\mathcal{D}} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \\ D_{\mu\nu}^{-1} &= \frac{1}{D} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (100,18)$$

Неопределенные функции $\mathcal{D}^{(l)}$ и $D^{(l)}$ в них не входят, так что эти тензоры калибровочно-инвариантны²⁾. В силу соотношения (100,14) то же самое относится и к поляризационному оператору $\mathcal{P}_{\mu\nu}$. Он представляет собой поперечный тензор

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \mathcal{P}(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (100,19)$$

причем $\mathcal{P} = k^2 - 4\pi/\mathcal{D}$, или³⁾

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 \left(1 - \frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2} \right)}. \quad (100,20)$$

Таким образом, поляризационный оператор является (в отличие от самого фотонного пропагатора) калибровочно-инвариантной величиной.

§ 101. Собственно-энергетическая функция фотона

Для дальнейшего исследования аналитических свойств фотонного пропагатора будет полезно ввести, наряду с поляризационным оператором, еще одну вспомогательную функцию $\Pi_{\mu\nu}(k)$, которую называют *собственно-энергетической функцией*

¹⁾ Определение $D^{(l)}$ в этой формуле не совпадает с определенным в (77,3).

²⁾ Тот факт, что матрица $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1}$ имеет бесчисленное множество обратных ей матриц $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ (с разными $\mathcal{D}^{(l)}$), связан с равенством нулю ее определителя.

³⁾ Отметим также, что подстановка (100,16), (100,17), (100,19) в (100,13) приводит к равенству $\mathcal{D}^{(l)} = D^{(l)}$. Этот результат вполне естествен: калибровочное преобразование операторов A^μ не зависит от их представления, и возникающее изменение одинаково для пропагаторов $D_{\mu\nu}$ и $\mathcal{D}_{\mu\nu}$.

фотона. Именно, $i\Pi_{\mu\nu}/4\pi$ определяется как сумма всех вообще (а не только компактных) собственно-энергетических фотонных частей. Изобразив эту сумму квадратиком на диаграмме, представим точный пропагатор суммой

$$\text{---} \text{---} = \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \square \text{---} \text{---}$$

т. е.

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + D_{\mu\lambda} \frac{\Pi^{\lambda\rho}}{4\pi} D_{\rho\nu}. \quad (101,1)$$

Выразив отсюда $\Pi_{\mu\nu}$ в виде

$$\frac{1}{4\pi} \Pi_{\mu\nu} = D_{\mu\lambda}^{-1} \mathcal{D}^{\lambda\rho} D_{\rho\nu}^{-1} - D_{\mu\nu}^{-1}$$

и подставив сюда (100,16—18) и затем (100,20), получим

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad \Pi = \frac{\mathcal{P}}{1 - \mathcal{P}/k^2}. \quad (101,2)$$

Мы видим, что $\Pi_{\mu\nu}$ (как и $\mathcal{P}_{\mu\nu}$) — калибровочно-инвариантный тензор.

Полезность величины $\Pi_{\mu\nu}$ связана с ее выражением в координатном представлении. Его легко найти, заметив, что равенство

$$\frac{1}{4\pi} \Pi_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\lambda}^{-1} D_{\rho\nu}^{-1} \{ \mathcal{D}^{\lambda\rho}(k) - D^{\lambda\rho}(k) \},$$

в котором

$$D_{\mu\lambda}^{-1}(k) = \frac{1}{4\pi} (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu),$$

в координатном представлении можно написать в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(x-x') &= \\ &= \frac{1}{4\pi} (\partial_\mu \partial_\lambda - g_{\mu\lambda} \partial_\sigma \partial^\sigma) (\partial'_\nu \partial'_\rho - g_{\nu\rho} \partial'_\sigma \partial'^\sigma) \{ \mathcal{D}^{\lambda\rho}(x-x') - D^{\lambda\rho}(x-x') \}. \end{aligned}$$

Для осуществления дифференцирования сюда надо подставить

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\lambda\rho}(x-x') - D^{\lambda\rho}(x-x') &= \\ &= i \langle 0 | T A^\lambda(x) A^\rho(x') - T A_{\text{int}}^\lambda(x) A_{\text{int}}^\rho(x') | 0 \rangle. \quad (101,3) \end{aligned}$$

Мы видели в § 76, что дифференцирование T -произведения требует, вообще говоря, осторожности ввиду его разрывного характера. Но усредняемая в (101,3) разность непрерывна вместе со своими первыми производными, так как правила коммутации для компонент операторов $A^\lambda(x)$ и $A_{\text{int}}^\lambda(x)$ (взятых в один и

тот же момент времени) одинаковы и соответствующие скачки сокращаются (ср. § 76). Поэтому дифференцирование разности (101,3) можно производить под знаком T . Согласно (99,6) и (99,6а) получим в результате искомое выражение

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x') = 4\pi i e^2 \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(x') | 0 \rangle. \quad (101,4)$$

Оно в явном виде выявляет калибровочную инвариантность $\Pi_{\mu\nu}$, поскольку таковы операторы тока.

Из (101,4) можно получить важное интегральное представление этой функции.

Ввиду (101,2) достаточно рассмотреть скалярную функцию $\Pi = \frac{1}{3} \Pi_\mu^\mu$. В координатном представлении

$$\begin{aligned} \Pi(x-x') &= \frac{4\pi}{3} i e^2 \langle 0 | T j_\mu(x) j^\mu(x') | 0 \rangle = \\ &= \frac{4\pi}{3} i e^2 \left\{ \begin{aligned} \sum_n \langle 0 | j_\mu(x) | n \rangle \langle n | j^\mu(x') | 0 \rangle & \text{при } t > t', \\ \sum_n \langle 0 | j_\mu(x') | n \rangle \langle n | j^\mu(x) | 0 \rangle & \text{при } t < t', \end{aligned} \right. \quad (101,5) \end{aligned}$$

где символ n нумерует состояния системы (электромагнитное + электрон-позитронное поля)¹⁾. Так как оператор тока $j(x)$ зависит от $x^\mu = (t, \mathbf{r})$, то зависят от x также и его матричные элементы. Эту зависимость можно установить в явном виде, если выбрать в качестве состояний $|n\rangle$ состояния с определенными значениями полного 4-импульса.

Зависимость матричных элементов тока от времени, как и для всякого гейзенберговского оператора, дается выражением

$$\langle n | j^\mu(t, \mathbf{r}) | m \rangle = \langle n | j^\mu(\mathbf{r}) | m \rangle e^{-i(E_m - E_n)t},$$

где E_n, E_m — энергии состояний $|n\rangle$ и $|m\rangle$, а $j(\mathbf{r})$ — шредингеровский оператор.

Для определения координатной зависимости матричных элементов рассматриваем оператор $j(\mathbf{r})$ как результат преобразования оператора $j(0)$ путем параллельного переноса на расстояние \mathbf{r} . Оператор такого переноса есть $\exp(i\mathbf{r}\mathbf{P})$, где \mathbf{P} — оператор полного импульса системы (см. III, § 15, задача 1). Имея в виду общее правило преобразования матричных элементов (см. III (12,7)), найдем поэтому, что

$$\langle n | j^\mu(\mathbf{r}) | m \rangle = \langle n | e^{-i\mathbf{r}\mathbf{P}} j^\mu(0) e^{i\mathbf{r}\mathbf{P}} | m \rangle = \langle n | j^\mu(0) | m \rangle e^{i(\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_n)\mathbf{r}}.$$

¹⁾ Оператор тока сохраняет заряд; поэтому состояния $|n\rangle$, комбинирующие с вакуумом $|0\rangle$, могут содержать лишь одинаковые числа электронов и позитронов. Далее, оператор тока зарядово-нечетен (§ 28); поскольку каждая электрон-позитронная пара и каждый фотон зарядово-нечетны (а вакуум, по определению, зарядово-четен), то суммарные числа пар и фотонов в состояниях $|n\rangle$ должны быть нечетны.

Вместе с предыдущей формулой это дает окончательно

$$\langle n | j^\mu(t, \mathbf{r}) | m \rangle = \langle n | j^\mu(0) | m \rangle e^{-i(P_m - P_n)x}. \quad (101,6)$$

Отметим также, что матрица $\langle n | j^\mu(0) | m \rangle$ эрмитова (как и матрица (101,6) эрмитова оператора $j^\mu(t, \mathbf{r})$ в целом), а в силу уравнения непрерывности (99,7) она удовлетворяет условию поперечности

$$(P_n - P_m)^\mu \langle n | j_\mu(0) | m \rangle = 0. \quad (101,7)$$

Вернемся к вычислению функции $\Pi(x - x')$. Подставив (101,6) в (101,5), имеем

$$\Pi(\xi) = \frac{4\pi i e^2}{3} \sum_n \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | j^\mu(0) | 0 \rangle e^{\mp i P_n \xi} \quad \text{при } \tau \geq 0, \quad (101,8)$$

где $x - x' = \xi = (\tau, \xi)$. Обозначим

$$\rho(k^2) = -\frac{4\pi e^2}{3} (2\pi)^3 \sum_n \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle 0 | j^\mu(0) | n \rangle^* \delta^{(4)}(k - P_n). \quad (101,9)$$

Суммирование производится по всем системам реальных электронных пар и фотонов, которые могут быть рождены виртуальным фотоном с 4-импульсом $k = (\omega, \mathbf{k})$ ($\omega > 0$), а для каждой из таких систем — еще и по ее внутренним переменным (поляризации и импульсы частиц в системе центра инерции¹⁾). В результате такого суммирования функция ρ может зависеть только от k , а ввиду ее скалярности — только от k^2 . В частности, ρ не зависит от направления \mathbf{k} . Имея в виду эти свойства функции ρ , переписываем (101,8) в виде

$$\begin{aligned} \Pi(\xi) &= -i \int_0^\infty d\omega \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rho(k^2) e^{i k \xi - i \omega |\tau|} = \\ &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\omega d(\mu^2) \delta(\mu^2 - k^2) \rho(\mu^2) e^{i k \xi - i \omega |\tau|}. \end{aligned}$$

Переход к импульсному представлению осуществляется подстановкой сюда формулы

$$e^{-i\omega|\tau|} = 2i\omega \int_{-\infty}^\infty e^{-ik_0\tau} \frac{1}{k_0^2 - \omega^2 + i0} \frac{dk_0}{2\pi} \quad (101,10)$$

¹⁾ Такое определение состояний $|n\rangle$, очевидно, тождественно с определением их, как состояний, для которых отличны от нуля матричные элементы $\langle 0 | j | n \rangle$ зарядово-четного оператора.

(см. § 77, стр. 340) и дает

$$\Pi(k^2) = \int_0^\infty d(\mu^2) \int_0^\infty d(\omega^2) \delta(\mu^2 + k^2 - \omega^2) \frac{\rho(\mu^2)}{k_0^2 - \omega^2 + i0},$$

или окончательно

$$\Pi(k^2) = \int_0^\infty \frac{\rho(\mu^2) d\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i0}. \quad (101,11)$$

Коэффициент ρ в этом интегральном представлении называют *спектральной плотностью* функции $\Pi(k^2)$. Он обладает свойствами:

$$\begin{aligned} \rho(k^2) &= 0 \quad \text{при } k^2 < 0, \\ \rho(k^2) &> 0 \quad \text{при } k^2 > 0. \end{aligned} \quad (101,12)$$

Действительно, 4-импульс k виртуального фотона, который может родить систему реальных частиц, непременно времениподобен (k^2 совпадает с квадратом полной энергии частиц в системе их центра инерции). В силу же условия поперечности (101,7) имеем

$$P_n^\mu \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle = 0.$$

Но 4-вектор $\langle 0 | j | n \rangle$, ортогональный времениподобному 4-вектору (P_n) , пространственноподобен, т. е.

$$\langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle 0 | j^\mu(0) | n \rangle^* < 0,$$

а потому согласно определению (101,9) $\rho > 0$.

§ 102. Точный электронный пропагатор

Подобно фотонному, точный электронный пропагатор определяется формулой

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i \langle 0 | T \Psi_i(x) \bar{\Psi}_k(x') | 0 \rangle \quad (102,1)$$

(i, k — биспинорные индексы), отличающейся от определения (76,1) пропагатора свободных частиц

$$G_{ik}(x - x') = -i \langle 0 | T \Psi_i^{\text{int}}(x) \bar{\Psi}_k^{\text{int}}(x') | 0 \rangle \quad (102,2)$$

заменой Ψ -операторов в представлении взаимодействия на гейзенберговские.

Те же рассуждения, что и при выводе (100,7), позволяют преобразовать \mathcal{G}_{ik} к виду

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i \frac{\langle 0 | T \Psi_i^{\text{int}}(x) \bar{\Psi}_k^{\text{int}}(x') S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \quad (102,3)$$

Разложение этого выражения по степеням e^2 приводит к представлению \mathcal{G} -функции в виде совокупности диаграмм с двумя внешними электронными линиями и различным числом вершин. При этом роль знаменателя в (102,3) снова сводится к необходимости учитывать лишь диаграммы без изолированных «вакуумных петель». Так, с точностью до членов $\sim e^4$ графическое представление пропагатора \mathcal{G} (жирная сплошная линия) имеет вид¹⁾

$$(102,4)$$

Жирной сплошной линии сопоставляется (в импульсном представлении) функция $i\mathcal{G}(p)$, а всем сплошным и пунктирным линиям в диаграммах правой стороны равенства — пропагаторы свободных частиц соответственно iG и $-iD$.

Блок, заключенный между двумя электронными линиями, называют *электронной собственно-энергетической частью*. Как и в фотонном случае, такую часть называют *компактной*, если она не может быть разделена дальше на две другие собственно-энергетические части путем рассечения по одной электронной линии. Сумму всех возможных компактных частей обозначим посредством $-i\mathcal{M}_{ik}$; функцию $\mathcal{M}_{ik}(p)$ называют *массовым оператором*. Так, с точностью до членов $\sim e^4$

$$(102,5)$$

Путем суммирования, в точности аналогичного выводу (100,13), получим

$$\mathcal{G}(p) = G(p) + G(p) \mathcal{M}(p) \mathcal{G}(p) \quad (102,6)$$

¹⁾ Как уже было объяснено в § 100, не надо учитывать также и диаграммы с «замкнутыми на себя» линиями, которые появились бы здесь уже во втором порядке:



(биспинорные индексы опускаем) или для обратных матриц

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{M}(p) = \hat{p} - m - \mathcal{M}(p). \quad (102,7)$$

В § 99 уже было отмечено, что гейзенберговские ψ -операторы (в противоположность ψ -операторам в представлении взаимодействия) меняются в результате калибровочного преобразования электромагнитных потенциалов. Вместе с ними оказывается калибровочно-инвариантным также и точный электронный пропагатор \mathcal{G} . Выясним закон его калибровочного преобразования (Л. Д. Ландау, И. М. Халатников, 1952).

Заранее очевидно, что изменение \mathcal{G} при калибровочном преобразовании должно выражаться через ту же величину $D^{(l)}$, которая добавляется при этом преобразовании к фотонному пропагатору. Это становится очевидным, если заметить, что при вычислении \mathcal{G} по диаграммам теории возмущений каждый член ряда выражается через функции D и никаких других электромагнитных величин в них не входит. Этим обстоятельством можно воспользоваться для упрощения выводов: можно делать любые частные предположения о свойствах произвольного оператора χ в преобразовании (99,8), лишь бы ответ был выражен через $D^{(l)}$.

В результате преобразования (99,8) пропагаторы \mathcal{D} (100,1) и \mathcal{G} (102,1) переходят в

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu} &\rightarrow i \langle 0 | T [A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x)] [A_\nu(x') - \partial'_\nu \chi(x')] | 0 \rangle, \\ \mathcal{G}_{ik} &\rightarrow -i \langle 0 | T \psi_i(x) e^{ie\chi(x)} e^{-ie\chi(x')} \bar{\psi}_k(x') | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (102,8)$$

Предположим, что оператор $\chi(x)$ имеет вид

$$\chi(x) = \sum \lambda(\omega) (a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx}), \quad (102,9)$$

где a_k , a_k^\dagger — операторы уничтожения и рождения некоторых (фиктивных) частиц — «продольных фотонов». Нет необходимости в дальнейшем уточнении свойств этих «частиц». Существенно лишь то, что в силу сделанного предположения операторы χ будут удовлетворять теореме Вика, т. е. их произведения усредняются попарно независимо от всех остальных операторов в T -произведении; кроме того, обращается в нуль среднее по вакууму от самого оператора χ : $\langle 0 | \chi | 0 \rangle = 0$. Тогда в (102,8) члены, содержащие χ , отделяются и получается

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu} &\rightarrow \mathcal{D}_{\mu\nu} + i \langle 0 | T \partial_\mu \chi(x) \cdot \partial'_\nu \chi(x') | 0 \rangle, \\ \mathcal{G}_{ik} &\rightarrow \mathcal{G}_{ik} \langle 0 | T e^{ie\chi(x)} e^{-ie\chi(x')} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (102,10)$$

Первое из этих преобразований можно записать в виде ¹⁾

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') \rightarrow \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') + \partial_\mu \partial'_\nu d^{(l)}(x-x'), \quad (102,11)$$

где

$$d^{(l)}(x-x') = i \langle 0 | T \chi(x) \chi(x') | 0 \rangle. \quad (102,12)$$

Отсюда видно, что $d^{(l)}$ определяет изменение при калибровочном преобразовании продольной части фотонного пропагатора $\mathcal{D}^{(l)}$.

Разлагая теперь величину

$$B \equiv \langle 0 | T e^{i\epsilon\chi(x)} e^{-i\epsilon\chi(x')} | 0 \rangle \quad (102,13)$$

по степеням ϵ и производя усреднение по теореме Вика, можно выразить каждый член разложения через $d^{(l)}$. Это вычисление сильно упрощается, если заметить, что его результат не может зависеть от некоммутативности операторов $\chi(x)$ и $\chi(x')$; действительно, их перестановка приведет лишь к перестановке аргументов x и x' в заведомо четной функции $d^{(l)}(x-x')$ ²⁾. В предположении коммутативности $\chi(x)$ и $\chi(x')$ перемножение экспоненциальных операторных множителей в (102,13) сводится к сложению их показателей (а знак хронологизации может быть опущен):

$$B = \langle 0 | e^{i\Phi} | 0 \rangle, \quad \Phi = e[\chi(x) - \chi(x')].$$

В разложении этого выражения члены нечетных степеней обращаются в нуль в результате усреднения, так что остается

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \langle 0 | \Phi^{2n} | 0 \rangle.$$

Далее, имеем

$$\langle 0 | \Phi^{2n} | 0 \rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} \langle 0 | \Phi^2 | 0 \rangle;$$

коэффициент справа есть число различных попарных сверток, которые можно произвести среди $2n$ операторов Φ (т. е. число способов, которыми можно соединить попарно $2n$

¹⁾ При этом подразумевается коммутативность операторов $\chi(x')$ и $\partial\chi(x)/\partial t$ при $t = t'$. Это можно обеспечить, предположив, что коэффициент $\lambda(\omega)$ в (102,9) убывает при $\omega \rightarrow \infty$ быстрее, чем $\omega^{-1/2}$.

²⁾ Коммутационные свойства $\chi(x)$ и $\chi(x')$ существенны, конечно, для вида самой функции $d^{(l)}(x-x')$. Подчеркнем в этой связи, что, предположив для оператора $\chi(x)$ вид (102,9), мы тем самым рассматриваем лишь такие калибровочные преобразования, которые не нарушают пространственно-временной однородности, т. е. сохраняют зависимость \mathcal{D} только от разности $x-x'$ (в общем же случае вполне произвольного преобразования это свойство может нарушиться).

перенумерованных точек)¹⁾. Отсюда

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \langle 0 | \Phi^2 | 0 \rangle \right)^n = \exp \frac{\langle 0 | \Phi^2 | 0 \rangle}{2}.$$

Наконец, учитывая, что

$$\langle 0 | \Phi^2 | 0 \rangle = -e^2 \langle 0 | \chi^2(x) + \chi^2(x') - 2\chi(x)\chi(x') | 0 \rangle = \\ = 2ie^2 [d^{(l)}(0) - d^{(l)}(x-x')],$$

находим окончательно следующую формулу преобразования \mathcal{G} , если \mathcal{D} преобразуется согласно (102,11):

$$\mathcal{G}(x-x') \rightarrow \mathcal{G}(x-x') \exp \{ie^2 [d^{(l)}(0) - d^{(l)}(x-x')]\}. \quad (102,14)$$

Эта формула относится к координатному представлению пропагаторов. В общем случае в ней нельзя перейти к компонентам Фурье, т. е. невозможно выразить изменение пропагатора $\mathcal{G}(p)$ в импульсном представлении через изменение пропагатора $\mathcal{D}(p)$. Такой переход возможен, однако, для бесконечно малого калибровочного преобразования. Обозначив для ясности малую величину $d^{(l)}$ в этом случае как $\delta d^{(l)}$, имеем из (102,14) для изменения функции \mathcal{G}

$$\delta\mathcal{G}(x-x') = ie^2 \mathcal{G}(x-x') [\delta d^{(l)}(0) - \delta d^{(l)}(x-x')]. \quad (102,15)$$

В компонентах Фурье²⁾

$$\delta\mathcal{G}(p) = ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta d^{(l)}(q) [\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p-q)]. \quad (102,16)$$

При этом $\delta d^{(l)}(q)$ связано с изменением функции $\mathcal{D}^{(l)}$ согласно

$$\delta\mathcal{D}^{(l)}(q) = q^2 \delta d^{(l)}(q). \quad (102,17)$$

Для электронного пропагатора можно было бы получить интегральное представление, аналогичное формуле (101,11). Его

¹⁾ Действительно, выберем какой-то способ усреднения. Если теперь совершить все возможные перестановки точек, то получим $(2n)!$ членов. Среди них, однако, есть лишние. Во-первых, не приводят к новым способам свертывания перестановки точек внутри пар; таких 2^n . Во-вторых, ничего не означают перестановки самих пар; таких $n!$. Разделив $(2n)!$ на 2^n и на $n!$, получим указанное в тексте число.

²⁾ Если функция $f(x) = f_1(x) f_2(x)$, то ее компоненты Фурье

$$f(p) = \int f(x) e^{ipx} d^4x = \int \int d^4x \frac{d^4q_1 d^4q_2}{(2\pi)^8} e^{ix(p-q_1-q_2)} f_1(q_1) f_2(q_2) = \\ = \int \frac{d^4q_1 d^4q_2}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p-q_1-q_2) f_1(q_1) f_2(q_2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} f_1(q) f_2(p-q).$$

При переходе от (102,15) к (102,16) учтено также, что

$$f(x=0) = \int f(q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

вывод основан на выражениях

$$\Psi_{nm}(x) = \Psi_{nm}(0) e^{-i(P_m - P_n)x} \quad (102,18)$$

для матричных элементов Ψ -оператора, подобных использованным в § 101 выражениям (101,6) для матричных элементов тока. В противоположность току, однако, сами Ψ -операторы калибровочно-неинвариантны. Поэтому и координатная зависимость вида (102,18) не имеет общего характера, а относится лишь к некоторой определенной калибровке. Тем самым относится лишь к определенной калибровке и основанное на (102,18) интегральное представление пропагатора. Более глубокая физическая причина этой ситуации состоит в том, что равенство нулю массы фотона приводит к инфракрасной катастрофе (§ 95). Вследствие этого электрон в процессе взаимодействия испускает бесконечное число мягких квантов, что в значительной степени лишает прямого смысла «одночастичный» пропагатор (102,1).

§ 103. Вершинный оператор

В сложных диаграммах можно выделить, наряду с собственно-энергетическими частями, также и не сводящиеся к ним блоки другого вида. К важной категории таких блоков мы придем, рассмотрев функцию

$$K_{ik}^{\mu}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0 | T A^{\mu}(x_1) \Psi_i(x_2) \bar{\Psi}_k(x_3) | 0 \rangle \quad (103,1)$$

с одним 4-векторным и двумя биспинорными индексами; в силу однородности пространства-времени она зависит лишь от разностей аргументов x_1, x_2, x_3 . Выраженная через операторы в представлении взаимодействия, функция K имеет вид:

$$K_{ik}^{\mu}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\langle 0 | T A_{int}^{\mu}(x_1) \Psi_i^{int}(x_2) \bar{\Psi}_k^{int}(x_3) S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \quad (103,2)$$

Переход к импульсному представлению осуществляется формулой

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + k - p_2) K_{ik}^{\mu}(p_2, p_1; k) = \iiint K_{ik}^{\mu}(x_1, x_2, x_3) e^{-ikx_1 + ip_2x_2 - ip_1x_3} d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3. \quad (103,3)$$

В диаграммной технике функциям K_{ik}^{μ} соответствуют блоки (треххвостки) вида



$$(103,4)$$

с тремя (одним фотонным и двумя электронными) концами, импульсы которых связаны законом сохранения

$$p_1 + k = p_2. \quad (103,5)$$

Член нулевого порядка в разложении этой функции обращается в нуль, а член первого порядка в координатном представлении

$$K^{\mu}(x_1, x_2, x_3) = e \int G(x_2 - x) \gamma_{\nu} G(x - x_3) \cdot D^{\nu\mu}(x_1 - x) d^4x$$

или в импульсном представлении

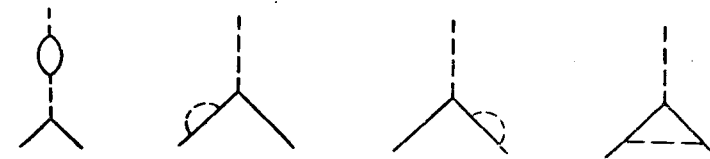
$$K^{\mu}(p_2, p_1; k) = e G(p_2) \gamma^{\nu} G(p_1) \cdot D^{\nu\mu}(k) \quad (103,6)$$

(биспинорные индексы опущены); соответствующая диаграмма:



$$(103,7)$$

При переходе к следующим приближениям диаграммы усложняются за счет добавления новых вершин. Не все такие диаграммы, однако, дают нечто существенно новое. Так, в третьем порядке возникают диаграммы



$$(103,8)$$

Первые три можно расщепить (по одной фотонной или электронной линии) на простую вершину (103,7) и собственно-энергетическую часть второго порядка; для четвертой диаграммы такое разбиение невозможно. Эта ситуация имеет общий характер. Поправки первого рода приведут просто к замене в (103,6) множителей G и D точными пропагаторами \mathcal{G} и \mathcal{D} . Остальные же члены разложения в сумме приведут к новой величине, которая заменит собой в (103,6) множитель γ^{μ} . Обозначив эту величину через Γ^{μ} , имеем, таким образом, по определению

$$K^{\mu}(p_2, p_1; k) = \{i\mathcal{G}(p_2) [-ie\Gamma_{\nu}(p_2, p_1; k)] i\mathcal{G}(p_1)\} [-i\mathcal{D}^{\nu\mu}(k)]. \quad (103,9)$$

Блок, соединенный с другими частями диаграммы одной фотонной и двумя электронными линиями, называют *вершиной*

частью, если этот блок нельзя разделить на части, соединенные между собой лишь одной (электронной или фотонной) линией. Величина Γ^* представляет собой сумму всего (бесконечного) множества вершинных частей, включая простую вершину γ^* ; ее называют *вершинным оператором* (или *вершинной функцией*).

Приведем все диаграммы вершинного оператора с точностью до величин пятого порядка:

$$-ie\Gamma \approx \text{diagram a)} + \text{diagram b)} + \text{diagram б)} + \text{diagram г)} + \text{diagram з)} + \text{diagram д)} + \text{diagram е)} + \text{diagram ж)} + \text{diagram з)} + \text{diagram и)} \quad (103,10)$$

(точный вершинный оператор $-ie\Gamma$ мы обозначаем черной точкой).

Оператор Γ (как и оператор γ простой вершины) имеет два матричных (биспинорных) и один 4-векторный индекс; он является функцией двух электронных (p_1, p_2) и одного фотонного (k) импульсов. При этом все три импульса не могут одновременно относиться к реальным частицам: диаграмма (103,4) сама по себе (не как часть более сложной диаграммы) отвечала бы поглощению фотона свободным электроном, но такой процесс несовместим с законом сохранения 4-импульса реальных частиц. Поэтому хотя бы один из трех концов диаграммы должен относиться к виртуальной частице (или к внешнему полю).

Вершинные части можно разделить еще на две категории: *неприводимые* и *приводимые*. Неприводимыми называют те из них, которые не содержат в себе собственно-энергетических поправок к внутренним линиям и в которых нельзя выделить частей, представляющих собой поправки (более низкого порядка) к внутренним вершинам. Так, из диаграмм (103,10) неприводимы лишь б) и г) (не считая простой вершины а)). Диаграммы ж), з), и) содержат собственно-энергетические части; в диаграмме в) верхний пунктир можно рассматривать как поправку к верхней вершине, а боковые пунктиры в диаграммах д) и е) — как поправки к боковым вершинам.

Заменяв в неприводимых диаграммах внутренние линии такими же жирными линиями, а вершины — черными точками (т. е.

заменяв приближенные пропагаторы D, G точными \mathcal{D}, \mathcal{G} , а приближенные вершинные операторы γ — точными Γ^*), мы получим, очевидно, совокупность всех вообще вершинных частей. Таким образом, разложение вершинного оператора можно представить в виде

$$\text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \dots \quad (103,11)$$

Это равенство представляет собой по отношению к Γ интегральное уравнение с бесконечным числом членов в правой стороне.

Из изложенного ясен общий принцип составления точных выражений для диаграммных блоков с любым числом концов. Они строятся как средние по вакууму от T -произведений гейзенберговских операторов: по одному оператору $\psi(x)$ на каждый начальный электрон, $\bar{\psi}(x)$ — на каждый конечный электрон и $A(x)$ — на каждый фотон.

Приведем еще один пример: диаграммы вида

$$\text{diagram} \quad (103,12)$$

с четырьмя электронными концами («электронная четыреххвостка»). Мы приходим к таким диаграммам, рассмотрев функцию

$$K_{ik, lm}(x_1, x_2; x_3, x_4) = \langle 0 | T \psi_i(x_1) \psi_k(x_2) \bar{\psi}_l(x_3) \bar{\psi}_m(x_4) | 0 \rangle \quad (103,13)$$

(зависящую, конечно, лишь от разностей четырех аргументов). Ее компоненты Фурье можно представить в виде

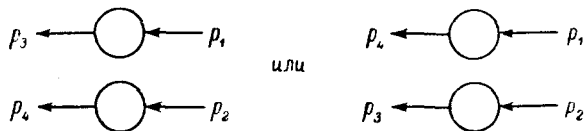
$$\int K_{ik, lm}(x_1, x_2; x_3, x_4) e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x_3 - p_4 x_4)} d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) K_{ik, lm}(p_3, p_4; p_1, p_2), \quad (103,14)$$

причем

$$K_{ik, lm}(p_3, p_4; p_1, p_2) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_3) \mathcal{G}_{il}(p_1) \mathcal{G}_{km}(p_2) - (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 - p_3) \mathcal{G}_{im}(p_1) \mathcal{G}_{kl}(p_2) + \mathcal{G}_{in}(p_3) \mathcal{G}_{kr}(p_4) [-i\Gamma_{nr, st}(p_3, p_4; p_1, p_2)] \mathcal{G}_{st}(p_1) \mathcal{G}_{lm}(p_2). \quad (103,15)$$

1) Получающиеся таким образом диаграммы называют *скелетными*.

В последнем выражении первые два члена исключают из определения функции $\Gamma(p_3, p_4; p_1, p_2)$ диаграммы, распадающиеся на две не связанные между собой части с двумя внешними концами каждая:



В третьем же члене множители \mathcal{G} исключают из определения Γ те части диаграммы, которые представляют собой поправки к внешним электронным линиям.

Отметим также, что по свойствам T -произведения фермиевских ψ -операторов функции $\Gamma(p_3, p_4; p_1, p_2)$ обладают свойствами антисимметрии:

$$\Gamma_{ik, lm}(p_3, p_4; p_1, p_2) = -\Gamma_{ki, ml}(p_4, p_3; p_2, p_1) = -\Gamma_{ik, ml}(p_3, p_4; p_2, p_1). \quad (103,16)$$

Если импульсы p_1, p_2, p_3, p_4 отвечают реальным частицам, то нераспадающиеся диаграммы (103,12) изображают процесс рассеяния двух электронов. Мы получим амплитуду этого процесса, сопоставив внешним концам диаграммы волновые амплитуды частиц (вместо пропагаторов \mathcal{G})¹⁾:

$$iM_{fi} = \bar{u}_i(p_3) \bar{u}_k(p_4) i\Gamma_{ik, lm}(p_3, p_4; p_1, p_2) u_l(p_1) u_m(p_2). \quad (103,17)$$

Ввиду (103,16) эта амплитуда автоматически обладает должной антисимметрией по отношению к перестановкам электронов.

§ 104. Уравнения Дайсона

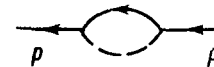
Точные пропагаторы и вершинная часть связаны между собой определенными интегральными соотношениями. Их происхождение становится в особенности ясным из диаграммного метода.

Введенное в предыдущем параграфе понятие о неприводимости или приводимости распространяется не только на вершинные части, но и на любые другие диаграммы (или их части). Рассмотрим с этой точки зрения компактные собственно-энергетические электронные диаграммы.

Легко сообразить, что из всего бесконечного множества этих диаграмм лишь одна неприводима; это — диаграмма второго

¹⁾ Мы увидим в дальнейшем (§ 107), что при составлении амплитуд реальных процессов не надо учитывать собственно-энергетических частей в свободных концах диаграммы.

порядка



Всякое усложнение этой диаграммы может рассматриваться как введение дальнейших поправок к ее внутренним (электронной или фотонной) линиям или же к одной из ее вершин. При этом существенно, что в силу очевидной симметрии диаграммы все вершинные поправки достаточно приписывать лишь к одной (любой) из ее двух вершин¹⁾.

Поскольку, таким образом, из всех компактных собственно-энергетических электронных частей лишь одна неприводима, то совокупность всех таких частей (т. е. массовый оператор \mathcal{M}) изобразится всего одной скелетной диаграммой:

$$\text{Diagram with } -iM \text{ in a circle} = \text{Diagram with a loop and external lines } p+k, p, k, p \quad (104,1)$$

Записанное в аналитическом виде, это графическое равенство дает²⁾

$$\mathcal{M}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{G}^{-1}(p) = -ie^2 \int \gamma^\nu \mathcal{G}(p+k) \Gamma^\mu(p+k, p; k) \cdot \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \quad (104,2)$$

Аналогичное выражение может быть написано и для поляризационного оператора \mathcal{P} . Среди фотонных компактных собственно-энергетических частей тоже лишь одна неприводима, так что \mathcal{P} тоже представляется всего одной скелетной диаграммой:

$$\text{Diagram with } \frac{i\mathcal{P}}{4\pi} \text{ in a circle} = \text{Diagram with a loop and external lines } p+k, p, k \quad (104,3)$$

¹⁾ Для ясности подчеркнем, что хотя мы получим всю требуемую совокупность диаграмм, вводя поправки лишь к одной из вершин, но для каждой определенной диаграммы структура поправочного блока, вообще говоря, различна в зависимости от того, которой из вершин он приписывается. Например:



где для одной и той же диаграммы обведены квадратами блоки, которые играют роль вершинной части при отнесении ее к правой или левой вершине.

²⁾ Если в (104,1) точную вершинную часть приписать левой вершине, то в уравнении (104,2) переставятся множители γ и Γ . Обе формы уравнения, разумеется, по существу эквивалентны.

Соответствующее аналитическое равенство:

$$\frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)}{4\pi} = D_{\mu\nu}^{-1}(k) - \mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1}(k) = \\ = ie^2 \text{Sp} \int \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k) \Gamma_\nu(p+k, p; k) \mathcal{G}(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \quad (104,4)$$

(биспинорные индексы в (104,2) и (104,4) опущены).

Соотношения (104,2) и (104,4) называются *уравнениями Дайсона*. Их можно получить также и прямым аналитическим вычислением.

Так, для вывода уравнения (104,2) рассмотрим величину

$$(\hat{p} - m)_{ii} \mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i(\hat{p} - m)_{ii} \langle 0 | T \psi_i(x) \bar{\psi}_k(x') | 0 \rangle$$

($p = i\partial$ — оператор дифференцирования по x). Она вычисляется с помощью (99,5) точно так же, как это было сделано в § 76 при выводе уравнения (76,7) для пропагатора свободных частиц. В результате получим

$$(\hat{p} - m)_{ii} \mathcal{G}_{ik}(x - x') = \\ = -ie\gamma_{ii}^y \langle 0 | T A_\nu(x) \psi_l(x) \bar{\psi}_k(x') | 0 \rangle + \delta_{ik} \delta^{(4)}(x - x');$$

δ -функциональный член в правой стороне этого равенства такой же, как в (76,7), поскольку коммутационные соотношения при $t = t'$ для ψ -операторов в гейзенберговском представлении и в представлении взаимодействия одинаковы. Первый же член есть $-ie\gamma_\nu K_{ik}^y(x, x, x')$, так что можно написать (снова опуская биспинорные индексы):

$$(\hat{p} - m) \mathcal{G}(x - x') = -ie\gamma^\mu K_\mu(x, x, x') + \delta^{(4)}(x - x'). \quad (104,5)$$

Для перехода к компонентам Фурье замечаем, что если проинтегрировать определение (103,3) по $d^4 k d^4 p_2 / (2\pi)^8$, то получим

$$\int K^\mu(p+k, p; k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} = \int K^\mu(0, 0, x_3) e^{-ipx_3} d^4 x_3 = \\ = \int K^\mu(x, x, x') e^{ip(x-x')} d^4(x-x'), \quad (104,6)$$

откуда видно, что интеграл в левой стороне представляет собой компоненту Фурье функции $K^\mu(x, x, x')$. Таким образом, взяв компоненту Фурье от обеих сторон уравнения (104,5), используя затем определение (103,9) и вспомнив, что $\hat{p} - m = G^{-1}(p)$, получим

$$G^{-1}(p) \mathcal{G}(p) = 1 - ie^2 \int \gamma^\nu \mathcal{G}(p+k) \Gamma^\mu(p+k, p; k) \mathcal{G}(p) \cdot D_{\mu\nu}(k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}.$$

Наконец, умножив это равенство справа на $\mathcal{G}^{-1}(p)$, приходим вновь к уравнению (104,2).

§ 105. Тождество Уорда

Еще одна связь между фотонным пропагатором и вершинной частью, более простая, чем уравнение Дайсона, возникает как следствие калибровочной инвариантности.

Для ее вывода совершим калибровочное преобразование (99,8), предполагая $\chi(x) \equiv \delta\chi(x)$ бесконечно малой простой (неоператорной) функцией 4-координат x . Тогда электронный пропагатор изменится на величину

$$\delta\mathcal{G}(x, x') = ie\mathcal{G}(x - x') [\delta\chi(x) - \delta\chi(x')]. \quad (105,1)$$

Подчеркнем, что калибровочное преобразование такого вида нарушает пространственно-временную однородность и функция $\delta\mathcal{G}$ зависит уже от аргументов x и x' по отдельности, а не только от разности $x - x'$. Ее разложение Фурье происходит поэтому по переменным x и x' в отдельности. Другими словами, в импульсном представлении $\delta\mathcal{G}$ является функцией двух 4-импульсов:

$$\delta\mathcal{G}(p_2, p_1) = \int \int \delta\mathcal{G}(x, x') e^{ip_2 x - ip_1 x'} d^4 x d^4 x'.$$

Подставив сюда (105,1) и произведя интегрирование по $d^4 x d^4 x'$ или $d^4 \xi d^4 x'$ ($\xi = x - x'$), получим

$$\delta\mathcal{G}(p + q, p) = ie \delta\chi(q) [\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p + q)]. \quad (105,2)$$

С другой стороны, при том же калибровочном преобразовании к оператору $A_\mu(x)$ добавляется функция

$$\delta A_\mu^{(e)}(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta\chi, \quad (105,3)$$

которую можно рассматривать как бесконечно малое внешнее поле. В импульсном представлении:

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) = iq_\mu \delta\chi(q). \quad (105,4)$$

Величину $\delta\mathcal{G}$ можно вычислить и как изменение пропагатора под влиянием этого поля. С точностью до величин первого порядка по $\delta\chi$ это изменение изобразится, очевидно, одной скелетной диаграммой:

$$i\mathcal{G}(p+q, p) = \begin{array}{c} \downarrow q \\ \leftarrow p+q \quad \rightarrow p \end{array}$$

Здесь жирный пунктир — эффективная линия внешнего поля, т. е. ей сопоставляется множитель (см. (100,15))

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) + \delta A_\lambda^{(e)}(q) \frac{\mathcal{P}^{\lambda\nu}(q)}{4\pi} \mathcal{D}_{\nu\mu}(q).$$

Но 4-вектор $\delta A_\lambda^{(e)}(q)$ продолжен (по отношению к q), а тензор $\mathcal{P}^{\lambda\nu}$ поперечен. Поэтому второй член здесь обращается в нуль, так что остается

$$i\mathcal{G}(p+q, p) = \left[\text{diagram: a box with } \frac{i\mathcal{P}}{4\pi} \text{ and a loop with } p+q \text{ and } p \text{ lines} \right] \quad (105,5)$$

где тонкому пунктиру сопоставляется обычным образом просто поле $\delta A^{(e)}$. В аналитической форме:

$$\delta\mathcal{G} = e\mathcal{G}(p+q)\Gamma^\mu(p+q, p; q)\mathcal{G}(p) \cdot \delta A_\mu^{(e)}. \quad (105,6)$$

Подставив сюда (105,4) и сравнив теперь с (105,2), находим соотношение

$$\mathcal{G}(p+q) - \mathcal{G}(p) = -\mathcal{G}(p+q)\Gamma^\mu(p+q, p; q)\mathcal{G}(p) \cdot q_\mu$$

или для обратных матриц

$$\mathcal{G}^{-1}(p+q) - \mathcal{G}^{-1}(p) = q_\mu \Gamma^\mu(p+q, p; q) \quad (105,7)$$

(H. S. Green, 1953).

Устремив в этом равенстве $q \rightarrow 0$ и сравнив коэффициенты при бесконечно малом q_μ в обеих его сторонах, получим

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \mathcal{G}^{-1}(p) = \Gamma^\mu(p, p; 0). \quad (105,8)$$

Это — так называемое *тождество Уорда* (J. G. Ward, 1950). Мы видим, что производная по импульсу от $\mathcal{G}^{-1}(p)$ совпадает с вершинным оператором при нулевой передаче импульса¹⁾. Производная же от самой функции $\mathcal{G}(p)$

$$-\frac{\partial}{\partial p_\mu} i\mathcal{G}(p) = i\mathcal{G}(p) [-i\Gamma^\mu(p, p; 0)] i\mathcal{G}(p). \quad (105,9)$$

Аналогичным образом можно было бы найти также и высшие производные, проводя вычисления с точностью до членов более высоких порядков по $\delta\chi$. Нам такие формулы, однако, не понадобятся.

Рассмотрим теперь производную $\partial\mathcal{P}(k)/\partial k_\mu$ от поляризационного оператора. В отличие от функции $\mathcal{G}(p)$ величина $\mathcal{P}(k)$ калибровочно-инвариантна и не меняется при введении фиктивного внешнего поля (105,4). Поэтому его производную нельзя вычислить тем же способом. Однако и для нее можно получить определенное диаграммное выражение.

¹⁾ В нулевом приближении, т. е. для пропагатора свободных частиц, это тождество очевидно: $G^{-1}(p) = \hat{p} - m$, и потому $\partial G^{-1}/\partial p_\mu = \gamma^\mu$.

Для этого рассмотрим первую из диаграмм, входящих в определение \mathcal{P} — диаграмму второго порядка

$$\left[\text{diagram: a box with } \frac{i\mathcal{P}}{4\pi} \text{ and a loop with } p+k \text{ and } p \text{ lines} \right] \approx \left[\text{diagram: a loop with } p+k \text{ and } p \text{ lines} \right] \quad (105,10)$$

Сплошным линиям в ней отвечают множители $iG(p)$ и $iG(p+k)$. Дифференцирование по k заменит второй из них на $i\partial G(p+k)/\partial k$, а согласно тождеству (105,9) такая замена эквивалентна добавлению лишней вершины на электронной линии:

$$\left[\text{diagram: a box with } \frac{ie}{4\pi} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial k} \text{ and a loop with } p+k \text{ and } p \text{ lines} \right] \approx \left[\text{diagram: a loop with } p+k \text{ and } p \text{ lines, and a vertex with } k'=0 \text{ on the } p+k \text{ line} \right] \quad (105,11)$$

Мы видим, что в первом исчезающем порядке искомая производная выразилась через диаграмму с тремя фотонными концами («фотонная треххвостка»). Сразу же подчеркнем, что эта диаграмма сама по себе отнюдь не дает амплитуду превращения одного фотона в два. Амплитуда такого процесса выразилась бы суммой диаграммы (105,11) и другой такой же диаграммой с измененным направлением обхода петли; согласно теореме Фарри эта сумма обращается в нуль. Сама же по себе диаграмма (105,11) не равна нулю.

Подобным образом можно дифференцировать и более сложные диаграммы, последовательно добавляя вершины с $k'=0$ на все электронные линии, зависящие от k . Существуют, однако, диаграммы, в которых зависимость от k имеется и во внутренних фотонных линиях, например диаграмма слева на рисунке

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\text{diagram: a complex loop with } k, q_1, q_2, k \text{ lines} \right) \right\} = \left[\text{diagram: a loop with } k'=0 \text{ on the } k \text{ line} \right] + \left[\text{diagram: a loop with } k'=0 \text{ on the } q_1 \text{ line} \right] + \left[\text{diagram: a loop with } k'=0 \text{ on the } q_2 \text{ line} \right]$$

Производная от графика в скобке представлена здесь в диаграммном виде путем введения нового графического обозначения — фиктивной трехчастичной фотонной вершины — точки, в которой

сходятся три пунктира и которой сопоставляется величина

$$4\pi i \frac{\partial D^{-1}}{\partial k_\mu} = 2ik_\mu \equiv v_\mu. \quad (105,12)$$

Теперь можно дифференцировать любой график, добавляя не зависящие от k линии вершины v_μ или γ_μ и вычисляя далее по общим правилам. Суммируя эти высшие поправки, получим

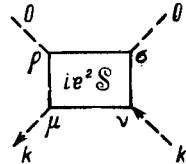
$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^\lambda} = \mathcal{Y}^{\rho\lambda\nu}, \quad (105,13)$$

где $ie\mathcal{Y}^{\rho\lambda\nu}$ — сумма внутренних частей всех полученных указанным способом фотонных треххвосток.

Для дальнейшего нам понадобится еще и вторая производная поляризованного оператора. Аналогичным образом дифференцируя еще раз равенство (105,13), получим

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} = \mathcal{P}_{\mu\rho\sigma\nu} + \mathcal{P}_{\mu\sigma\rho\nu}, \quad (105,14)$$

где $ie^2\mathcal{P}$ — сумма внутренних частей всех «фотонных четыреххвосток» вида



$$(105,15)$$

(разумеется, с включением и графиков с фиктивными трехфотонными вершинами (105,12)).

§ 106. Электронный пропагатор во внешнем поле

Если система находится в заданном внешнем поле $A^{(e)}(x)$, то точный электронный пропагатор определяется той же формулой (102,1), но в гамилтониан $H = H_0 + V$, осуществляющий преобразование к гейзенберговскому представлению операторов, входит также и взаимодействие электронов с внешним полем:

$$V = e \int A_\mu j^\mu d^3x + e \int A_\mu^{(e)} j^\mu d^3x. \quad (106,1)$$

Поскольку внешнее поле нарушает однородность пространства и времени, то пропагатор $\mathcal{G}(x, x')$ будет зависеть теперь уже от обоих аргументов x и x' в отдельности, а не только от их разности $x - x'$.

Если перейти обычным образом к представлению взаимодействия, то мы придем к обычной диаграммной технике, в которой

наряду с виртуальными фотонными линиями будут фигурировать также и линии внешнего поля. Такая техника, однако, неудобна в тех случаях, когда внешнее поле нельзя рассматривать как малое возмущение, прежде всего — когда частицы в поле могут находиться в связанных состояниях. Между тем электронный пропагатор во внешнем поле необходим в первую очередь как раз для изучения свойств связанных состояний, в частности для определения уровней энергии с учетом радиационных поправок. Для построения такого пропагатора следует исходить из представления операторов, в котором внешнее поле учитывается точно, уже в «нулевом» приближении по электрон-фотонному взаимодействию (W. H. Furry, 1951).

В дальнейшем мы будем предполагать внешнее поле стационарным, т. е. не зависящим от времени.

Требуемое представление ψ -операторов дается формулами (32,9) вторичного квантования во внешнем поле:

$$\begin{aligned} \psi^{(e)}(t, \mathbf{r}) &= \sum_n \left\{ a_n \psi_n^{(+)}(\mathbf{r}) e^{-ie_n^{(+)}t} + b_n^+ \psi_n^{(-)}(\mathbf{r}) e^{ie_n^{(-)}t} \right\}, \\ \bar{\psi}^{(e)}(t, \mathbf{r}) &= \sum_n \left\{ a_n^+ \bar{\psi}_n^{(+)}(\mathbf{r}) e^{ie_n^{(+)}t} + b_n \bar{\psi}_n^{(-)}(\mathbf{r}) e^{-ie_n^{(-)}t} \right\}, \end{aligned} \quad (106,2)$$

где $\psi_n^{(\pm)}(\mathbf{r})$ и $\epsilon_n^{(\pm)}$ — волновые функции и уровни энергии соответственно электрона и позитрона, являющиеся решениями «одночастичной» задачи — уравнения Дирака для частицы в поле. Легко понять, что операторы (106,2) являются ψ -операторами в некотором представлении (представление Фарри), как бы промежуточном между гейзенберговским и представлением взаимодействия. Их можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi^{(e)}(t, \mathbf{r}) &= e^{iH_1 t} \psi(\mathbf{r}) e^{-iH_0 t}, \\ \bar{\psi}^{(e)}(t, \mathbf{r}) &= e^{iH_1 t} \bar{\psi}(\mathbf{r}) e^{-iH_0 t}, \end{aligned} \quad (106,3)$$

где

$$H_1 = H_0 + e \int A_\mu^{(e)}(x) j^\mu(x) d^3x.$$

Оператор же электромагнитного поля A_μ , разумеется, коммутирует со вторым членом в H_1 , и потому для него представление Фарри совпадает с представлением взаимодействия.

Электронный пропагатор нулевого приближения в новом представлении определяется как

$$G_{ik}^{(e)}(x, x') = -i \langle 0 | T \psi_i^{(e)}(x) \bar{\psi}_k^{(e)}(x') | 0 \rangle. \quad (106,4)$$

Оператор $\psi^{(e)}(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Дирака во внешнем поле

$$[\hat{p} - e\hat{A}^{(e)}(x) - m] \psi^{(e)}(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (106,5)$$

а функция $G^{(e)}$ — соответственно уравнению

$$[\hat{p} - e\hat{A}^{(e)}(x) - m] G^{(e)}(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (106,6)$$

(ср. вывод (104,5)).

Диаграммная техника, выражающая точный пропагатор \mathcal{G} в виде ряда по e^2 , строится путем перехода от гейзенберговского представления к представлению Фарри — в точности так, как мы производили ранее переход к представлению взаимодействия. Мы получим в результате диаграммы того же вида, причем сплошным линиям будут соответствовать теперь множители $iG^{(e)}$ (вместо iG).

Незначительное отличие в правилах записи аналитических выражений диаграмм возникает лишь в связи с тем, что в координатном представлении $G^{(e)}$ — функция не только от разности $x - x'$. В постоянном внешнем поле, однако, сохраняется однородность времени, и потому моменты t и t' по-прежнему будут входить лишь в виде разности $t - t' \equiv \tau$, так что

$$G^{(e)} = G^{(e)}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

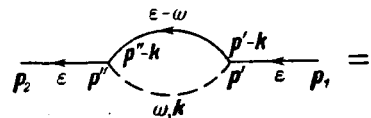
Переход к импульсному представлению осуществляется разложением Фурье по каждому из аргументов функции:

$$G^{(e)}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \int \int e^{i(\mathbf{p}_2 \mathbf{r} - \mathbf{p}_1 \mathbf{r}' - e\tau)} G(e, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \frac{de}{2\pi} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3}. \quad (106,7)$$

Каждой линии, которой отвечает множитель $iG^{(e)}(e, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$, должно приписываться теперь одно значение виртуальной энергии e , но два значения импульса — начальный \mathbf{p}_1 и конечный \mathbf{p}_2 :

$$iG^{(e)}(e, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = \overleftarrow{\frac{p_2 \cdot e \cdot p_1}{}}. \quad (106,8)$$

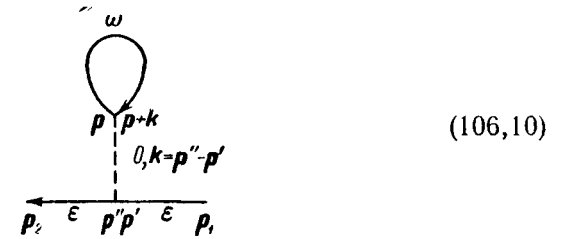
В результате получается правило записи аналитических выражений диаграмм, в которых обычным образом производятся интегрирования по $de/2\pi$, а по $d^3 p_1/(2\pi)^3$ и $d^3 p_2/(2\pi)^3$ интегрирования производятся независимо, с учетом сохранения импульса в каждой вершине. Так, например,



$$= e^2 \int \int \int G^{(e)}(e, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'') \gamma^\mu G^{(e)}(e - \omega, \mathbf{p}'' - \mathbf{k}, \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \times \\ \times \gamma^\nu G^{(e)}(e, \mathbf{p}', \mathbf{p}_1) D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{k}) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3}. \quad (106,9)$$

Важно отметить, что в излагаемой технике необходимо учитывать также и диаграммы с «замкнутыми на себя» электрон-

ными линиями, которые в обычной технике отбрасываются, как связанные с «вакуумным током». При наличии внешнего поля этот ток уже не должен обращаться в нуль в связи с вызываемой полем «поляризацией вакуума». Так, в диаграмме



верхней петле отвечает множитель

$$i \int \int G^{(e)}(\omega, \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (106,11)$$

Здесь, однако, надо еще уточнить смысл, придаваемый интегралу по $d\omega$. Дело в том, что интегрирование фурье-компоненты функции $G^{(e)}(\tau)$ по $d\omega$ сводится к взятию значения этой функции при $\tau = 0$; но функция $G^{(e)}(\tau)$ разрывна в этой точке, так что надо указать, какое именно из ее двух предельных значений должно быть взято. Для выяснения этого вопроса достаточно заметить, что интеграл (106,11) происходит от свертывания ψ -операторов, стоящих в одном и том же операторе тока:

$$j^\mu = \bar{\psi}^{(e)}(t, \mathbf{r}) \gamma^\mu \psi^{(e)}(t, \mathbf{r}),$$

где $\bar{\psi}^{(e)}$ стоит слева от $\psi^{(e)}$. Согласно определению пропагатора (106,4) такой порядок множителей при $t = t'$ получится, если понимать t' как $t' = t + 0$, т. е. предельное значение функции $G^{(e)}(t - t')$ — как предел при $t - t' \rightarrow -0$. Иначе можно сказать, что интеграл по $d\omega/2\pi$ в (106,11) надо понимать как

$$\int \dots e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} \text{ при } \tau \rightarrow -0. \quad (106,12)$$

Массовый оператор во внешнем поле определяется так же, как в § 102: $-i\mathcal{M}$ есть сумма всех компактных собственно-энергетических блоков. Он является теперь функцией энергии e и импульсов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 на тех концах внешних линий, которыми они соответственно входят и выходят из блока:

$$\overleftarrow{\varepsilon} \mathbf{p}_2 \boxed{-i\mathcal{M}(e, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)} \mathbf{p}_1 \overrightarrow{\varepsilon} \quad (106,13)$$

Поступая в точности так, как при выводе (102,6), получим уравнение

$$\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) - G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = \int \int G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'') \mathcal{M}(\varepsilon, \mathbf{p}'', \mathbf{p}') \mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{p}', \mathbf{p}_1) \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3}. \quad (106,14)$$

Более естественный вид этому уравнению можно придать, если вернуться к координатному представлению по пространственным переменным, введя функцию

$$\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \int \mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) e^{i(\mathbf{p}_2 \mathbf{r} - \mathbf{p}_1 \mathbf{r}')} \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6}, \quad (106,15)$$

и аналогично для других величин. Произведя в (106,14) обратное преобразование Фурье, получим

$$\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \int G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \mathcal{M}^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') d^3 x_1 d^3 x_2.$$

Применим теперь к обеим сторонам равенства оператор

$$\gamma^0 \varepsilon - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - e \gamma^\mu A_\mu^{(e)}(x)$$

(ε — число, $\mathbf{p} = -i\nabla$ — оператор дифференцирования по координатам \mathbf{r}). При этом надо учесть, что согласно (106,6)

$$[\gamma^0 \varepsilon - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - e \hat{A}^{(e)}(x)] G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (106,16)$$

В результате получим следующее уравнение:

$$[\gamma^0 \varepsilon - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - e \hat{A}^{(e)}(x)] \mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \int \mathcal{M}^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') d^3 x_1 = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (106,17)$$

Особая ценность функции $\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ состоит в том, что ее полюсы определяют уровни энергии электрона во внешнем поле.

Покажем это сначала для приближенной функции $G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Подставив операторы (106,2) в определение пропагатора (106,4), получим (в точности аналогично формулам (76,12) для пропагатора свободных частиц)

$$G_{ik}^{(e)}(t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} -i \sum_n \psi_{ni}^{(+)}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{nk}^{(+)}(\mathbf{r}') \exp\{-i\varepsilon_n^{(+)}(t - t')\}, & t > t', \\ i \sum_n \psi_{ni}^{(-)}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{nk}^{(-)}(\mathbf{r}') \exp\{i\varepsilon_n^{(-)}(t - t')\}, & t < t' \end{cases} \quad (106,18)$$

и после перехода к компонентам Фурье по времени

$$G_{ik}^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \left\{ \frac{\psi_{ni}^{(+)}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{nk}^{(+)}(\mathbf{r}')}{\varepsilon - \varepsilon_n^{(+)} + i0} + \frac{\psi_{ni}^{(-)}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{nk}^{(-)}(\mathbf{r}')}{\varepsilon + \varepsilon_n^{(-)} - i0} \right\}. \quad (106,19)$$

Мы видим, что $G^{(e)}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ как аналитическая функция ε имеет на положительной вещественной полуоси полюсы, совпадающие с уровнями энергии электрона, а полюсы на отрицательной полуоси совпадают с уровнями энергии позитрона. Значения $\varepsilon_n^{(\pm)} > m$ образуют непрерывный спектр¹⁾, и соответствующие полюсы сливаются в два разреза плоскости ε : от $-\infty$ до $-m$ и от m до $+\infty$. На отрезке $|\varepsilon| < m$ лежат полюсы, определяющие дискретные уровни энергии.

Для точного пропагатора $\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ можно получить аналогичное разложение, выразив его через матричные элементы шредингеровских операторов, с которыми матричные элементы гейзенберговских ψ -операторов связаны равенствами

$$\langle m | \psi(t, \mathbf{r}) | n \rangle = \langle m | \psi(\mathbf{r}) | n \rangle e^{-i(E_n - E_m)t} \quad (106,20)$$

(и так же для $\bar{\psi}$). Здесь E_n — точные (т. е. со всеми радиационными поправками) уровни энергии системы во внешнем поле. Оператор ψ увеличивает, а оператор $\bar{\psi}$ уменьшает на 1 (т. е. на $+|e|$) заряд системы. Это значит, что в матричных элементах $\langle n | \psi | 0 \rangle$ и $\langle 0 | \bar{\psi} | n \rangle$ состояния $|n\rangle$ должны соответствовать равному $+1$ заряду системы, т. е. могут содержать, помимо одного позитрона, лишь некоторое число электрон-позитронных пар и некоторое (нечетное — ср. примечание на стр. 21) число фотонов; энергии этих состояний обозначим как $E_n^{(-)}$. Аналогичным образом в матричных элементах $\langle 0 | \psi | n \rangle$ и $\langle n | \bar{\psi} | 0 \rangle$ состояния $|n\rangle$ содержат один электрон + система пар и фотонов (энергия E_n^{+}). Вместо (106,18) получим теперь

$$\mathcal{G}_{ik}(t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} -i \sum_n \langle 0 | \psi_i(\mathbf{r}) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | 0 \rangle \exp\{-iE_n^{(+)}(t - t')\}, & t > t', \\ i \sum_n \langle 0 | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | n \rangle \langle n | \psi_i(\mathbf{r}) | 0 \rangle \exp\{iE_n^{(-)}(t - t')\}, & t < t', \end{cases} \quad (106,21)$$

и отсюда

$$\mathcal{G}_{ik}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \left\{ \frac{\langle 0 | \psi_i(\mathbf{r}) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | 0 \rangle}{\varepsilon - E_n^{(+)} + i0} + \frac{\langle 0 | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | n \rangle \langle n | \psi_i(\mathbf{r}) | 0 \rangle}{\varepsilon + E_n^{(-)} - i0} \right\}. \quad (106,22)$$

Пусть ε близко к какому-либо из дискретных уровней энергии $E_n^{(+)}$ (или к одному из $-E_n^{(-)}$). Тогда из всей суммы в (106,22) можно оставить лишь один соответствующий полюсный член. Подставив его затем в (106,17), мы увидим, что

¹⁾ Предполагается, что внешнее поле исчезает на бесконечности.

множители, зависящие от второго аргумента r' (при $r \neq r'$), из уравнения выпадают. В результате мы получим однородное интегро-дифференциальное уравнение для функции $\langle 0 | \psi(r) | n \rangle$ (или $\langle n | \psi(r) | 0 \rangle$), которую мы обозначим для краткости через $\Psi_n(r)$ ¹⁾. Опустив индекс n , имеем

$$[\gamma^0 \epsilon + i\gamma \nabla - e\hat{A}^{(e)}(r)]_{ik} \Psi_k(r) - \int \mathcal{M}_{ik}(\epsilon, r, r_1) \Psi_k(r_1) d^3x_1 = 0. \quad (106,23)$$

Дискретные уровни энергии E_n выступают теперь как собственные значения этого уравнения. Тем самым уравнение (106,23) становится основой регулярной процедуры для определения этих уровней.

Выразим, например, из (106,23) поправку первого порядка по \mathcal{M} к дискретному уровню энергии электрона ϵ_n , полученному в результате решения уравнения Дирака

$$[\gamma^0 \epsilon_n + i\gamma \nabla - e\hat{A}^{(e)}(r)] \psi_n(r) = 0; \quad (106,24)$$

волновая функция $\psi_n(r)$ пусть нормирована условием

$$\int \psi_n^* \psi_n d^3x = 1. \quad (106,25)$$

Собственную функцию уравнения (106,23) запишем в виде

$$\Psi_n(r) = \psi_n(r) + \psi_n^{(1)}(r), \quad (106,26)$$

где $\psi_n^{(1)}$ — поправка к $\psi_n(r)$. Подставив (106,26) в уравнение (106,23), умножив его слева на $\bar{\psi}_n(r)$ и проинтегрировав по d^3x ²⁾, получим искомое выражение

$$E_n - \epsilon_n \approx \int \int \bar{\psi}_n(r) \mathcal{M}_{ik}(\epsilon_n, r, r_1) \psi_n(r_1) d^3x d^3x_1. \quad (106,27)$$

§ 107. Физические условия перенормировки

Излагавшаяся до сих пор в этой главе теория носила в значительной степени формальный характер. Мы оперировали со всеми величинами так, как если бы они были конечными, и намеренно не обращали внимания на встречающиеся в теории бесконечности. Между тем при фактическом вычислении функ-

¹⁾ В пренебрежении радиационными поправками $\Psi_n(r)$ совпадают (для состояний с одним электроном или позитроном) с волновыми функциями $\psi_n^{(+)}$ или $\psi_n^{(-)}$ — решениями уравнения Дирака.

²⁾ При интегрировании надо использовать самосопряженность дифференциального оператора уравнения (106,24) с целью перебросить его действие с $\psi_n^{(1)}$ на $\bar{\psi}_n$.

ций \mathcal{D} , \mathcal{S} , Γ по теории возмущений встречаются расходящиеся интегралы, которым нельзя, без привлечения дополнительных соображений, приписать какого-либо определенного значения. В появлении таких расходимостей проявляется логическое несовершенство существующей квантовой электродинамики. Мы увидим, однако, что в этой теории можно установить определенные предписания, позволяющие однозначным образом производить «вычитание бесконечностей» и в результате получать конечные значения для всех величин, имеющих непосредственный физический смысл. В основе этих предписаний лежат очевидные физические требования, сводящиеся к тому, чтобы масса фотона была равна нулю, а заряд и масса электрона были равны их наблюдаемым значениям.

Начнем с выяснения условий, налагаемых на фотонный пропагатор.

Рассмотрим процесс рассеяния, который может происходить через одночастичные промежуточные состояния с одним виртуальным фотоном. Амплитуда такого процесса должна иметь полюс, когда квадрат суммарного 4-импульса начальных частиц P совпадает с квадратом массы реального фотона, т. е. $P^2 = 0$; мы видели в § 80, что это требование следует из общего условия унитарности. Полюсный член в амплитуде возникает из диаграммы вида (80,1):



$$\left. \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\} P \quad (107,1)$$

причем с учетом радиационных поправок обе части диаграммы должны быть соединены жирной пунктирной линией (точный фотонный пропагатор). Это значит, что функция $\mathcal{D}(k^2)$ должна иметь полюс при $k^2 = 0$, т. е. должно быть

$$\mathcal{D} \rightarrow \frac{4\pi Z}{k^2} \quad \text{при} \quad k^2 \rightarrow 0, \quad (107,2)$$

где Z — постоянная. Для поляризационного оператора же $\mathcal{P}(k^2)$ отсюда получается согласно (100,20) условие

$$\mathcal{P}(0) = 0. \quad (107,3)$$

При этом коэффициент в (107,2)

$$\frac{1}{Z} = 1 - \frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2} \Big|_{k^2 \rightarrow 0}.$$

Дальнейшие ограничения на функцию $\mathcal{P}(k^2)$ можно получить из анализа физического определения электрического заряда частицы. Оно состоит в том, что две классические (т. е.

сколь угодно тяжелые) частицы, покоящиеся на больших расстояниях друг от друга¹⁾, должны взаимодействовать по закону Кулона: $U = e^2/r$. С другой стороны, это взаимодействие выражается диаграммой

$$(107,4)$$

где верхние и нижние линии отвечают классическим частицам. Фотонные собственно-энергетические поправки учтены на линии виртуального фотона. Всякие же другие поправки, затрагивающие линии тяжелых частиц, привели бы к обращению диаграммы в нуль. Действительно, добавление каких-либо еще внутренних линий в диаграмме (107,4) (например, соединение линий a и c или a и b фотонной линией) приводит к появлению на диаграмме линий виртуальных тяжелых частиц, которым сопоставляются соответствующие пропагаторы. Но пропагатор частицы содержит ее массу M в знаменателе и обращается в нуль при $M \rightarrow \infty$.

Из вида диаграммы (107,4) ясно (ср. § 83), что множитель $e^2 \mathcal{D}(k^2)$ в ней должен представлять собой (с точностью до знака) фурье-образ потенциала взаимодействия частиц. Статичность взаимодействия означает, что частоты виртуальных фотонов $\omega = 0$, а большим расстояниям отвечают малые волновые векторы k . Фурье-образ кулоновского потенциала есть $4\pi e^2/k^2$. Наконец, поскольку функция \mathcal{D} зависит только от квадрата $k^2 = \omega^2 - k^2$, то мы приходим к условию²⁾

$$\mathcal{D} \rightarrow \frac{4\pi}{k^2} \quad \text{при} \quad k^2 \rightarrow 0, \quad (107,5)$$

т. е. коэффициент в (107,2) должен быть $Z = 1$. Для поляризационного оператора $\mathcal{P}(k^2)$ это значит, что должно быть

$$\frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k^2 \rightarrow 0. \quad (107,6)$$

Помимо известного уже нам условия (107,3), отсюда следует, что должно быть также и

$$\mathcal{P}'(0) = 0. \quad (107,7)$$

¹⁾ Имеются в виду расстояния $\gg 1/m$, где m — масса электрона.

²⁾ Знак очевиден: $\mathcal{D}(k^2)$ стремится к пропагатору свободных фотонов $D(k^2)$.

В § 100 было отмечено, что эффективной внешней линии реального фотона отвечает в диаграмме множитель (100,15), или, с учетом (100,16) и (100,19),

$$\left[1 + \frac{1}{4\pi} \mathcal{P}(0) \mathcal{D}(0) \right] e_\mu.$$

Мы видим теперь, что ввиду (107,5—6) поправочный член здесь обращается в нуль. Другими словами, мы приходим к важному результату: во внешних фотонных линиях вообще не надо учитывать радиационных поправок.

Таким образом, естественные физические требования приводят к установлению определенных (равных нулю) значений величин $\mathcal{P}(0)$ и $\mathcal{P}'(0)$. Между тем вычисление этих величин по диаграммам теории возмущений привело бы для них к расходящимся интегралам. Мы видим, что способ устранения этих бесконечностей состоит в приписывании расходящимся выражениям наперед заданных значений, устанавливаемых физическими требованиями. О такой процедуре говорят как о *перенормировке* соответствующих величин¹⁾.

Способ проведения этой операции можно сформулировать и в несколько иной форме. Так, для перенормировки заряда частицы вводят нефизический «затравочный» заряд e_c как параметр, который входит в выражение исходного оператора электромагнитного взаимодействия, фигурирующего в формальной теории возмущений. После этого условие перенормировки формулируется как требование $e_c^2 \mathcal{D}(k^2) \rightarrow 4\pi e^2/k^2$ (при $k^2 \rightarrow 0$), где e — истинный, физический заряд частицы. Отсюда находим связь $e_c^2 Z = e^2$ и с ее помощью нефизическая величина e_c исключается из формул, определяющих наблюдаемые эффекты. Потребовав же сразу $Z = 1$, мы тем самым производим перенормировку как бы «на ходу» и избавляемся от необходимости введения фиктивных величин даже в промежуточных выкладках.

Перейдем к выяснению условий перенормировки электронного пропагатора. Для этого рассмотрим теперь процесс рассеяния, который может проходить через одночастичное промежуточное состояние с одним виртуальным электроном. Амплитуда такого процесса должна иметь полюс, когда квадрат суммарного 4-импульса начальных частиц P_i совпадает с квадратом массы реального электрона: $P_i^2 = m^2$. Полюсной член в

¹⁾ Идея такого подхода была высказана впервые Крамерсом (Н. Kramers, 1947). Систематическое же проведение метода перенормировок в квантовой электродинамике осуществлено в работах Дайсона, Томонага (S. Tomonaga), Фейнмана и Швингера.

амплитуде возникает из диаграммы вида

$$(107,8)$$

где, с учетом радиационных поправок, жирная линия — точный электронный пропагатор. Это значит, что функция $\mathcal{G}(p)$ должна иметь полюс при $p^2 = m^2$, т. е. должна иметь предельную форму

$$\mathcal{G}(p) \approx Z_1 \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i0} + g(p) \quad \text{при } p^2 \rightarrow m^2, \quad (107,9)$$

где Z_1 — скалярная постоянная, а $g(p)$ остается при $p^2 \rightarrow m^2$ конечной. Матричная структура полюсного члена в (107,9) (пропорциональность $\hat{p} + m$) является следствием того же условия унитарности, из которого возникает и само требование наличия полюса. Покажем это, одновременно выяснив важный вопрос об условиях перенормировки внешних электронных линий.

Если $\mathcal{G}(p)$ имеет предельный вид (107,9), то обратная матрица

$$\mathcal{G}^{-1}(p) \approx \frac{1}{Z_1}(\hat{p} - m) - (\hat{p} - m)g(\hat{p} - m) \quad \text{при } p^2 \rightarrow m^2. \quad (107,10)$$

Массовый же оператор

$$\mathcal{M} = G^{-1} - \mathcal{G}^{-1} \approx \left(1 - \frac{1}{Z_1}\right)(\hat{p} - m) + (\hat{p} - m)g(\hat{p} - m), \quad (107,11)$$

при $p^2 \rightarrow m^2$.

Эффективной внешней (скажем, входящей) электронной линии отвечает в диаграмме множитель (ср. (100,15))

$$\mathcal{U}(p) = u(p) + \mathcal{G}(p)\mathcal{M}(p)u(p), \quad (107,12)$$

где $u(p)$ — обычная амплитуда волновой функции электрона, удовлетворяющая уравнению Дирака $(\hat{p} - m)u = 0$. В силу требований релятивистской инвариантности (\mathcal{U} , как и u , — биспинор) предельное значение $\mathcal{U}(p)$ при $p^2 \rightarrow m^2$ может отличаться от $u(p)$ лишь постоянным скалярным множителем:

$$\mathcal{U}(p) = Z' u(p). \quad (107,13)$$

Этот множитель Z' определенным образом связан с множителем Z_1 , но определить эту связь просто подстановкой (107,10—11) в (107,12) нельзя ввиду возникающей неопределенности: результат будет зависеть от порядка, в котором совершается предельный переход в различных множителях в (107,12).

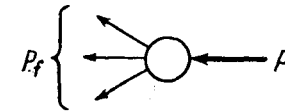
Можно, однако, обойтись без выяснения вопроса о правильном способе предельного перехода, обратившись вместо этого

к условию унитарности в применении к реакции, изображаемой диаграммой (107,8). Соотношение унитарности относится, вообще говоря, не к отдельным диаграммам, а к амплитудам процессов в целом. Но при $p^2 \rightarrow m^2$ полюсная диаграмма (107,8) дает основной вклад в соответствующую амплитуду M_{fi} , так что другие диаграммы, относящиеся к той же реакции, можно не рассматривать.

В силу требований унитарности, как это было показано в § 80, одночастичное промежуточное состояние приводит к появлению в амплитуде реакции мнимой части с δ -функциональным членом

$$i\pi\delta(p^2 - m^2) \sum_{\text{поля}} M_{fn} M_{in}^*, \quad (107,14)$$

где в данном случае индекс n относится к состоянию с одним реальным электроном, а суммирование производится по его поляризациям (во избежание лишних усложнений считаем, как и в § 80, что произведена симметризация обеих сторон соотношения унитарности по спиральностям начальных и конечных частиц; тогда $M_{fi} = M_{if}$). Амплитуда M_{fn} отвечает процессу, изображаемому диаграммой



и имеет вид

$$M_{fn} = (M'_{fn} \mathcal{U}) = Z' (M'_{fn} u),$$

где M'_{fn} — множитель с одним свободным биспинорным индексом¹⁾. Аналогичным образом амплитуда M_{in}^* имеет структуру вида

$$M_{in}^* = (\bar{u} M'^*_{in}) = Z' (\bar{u} M'^*_{in}).$$

Суммирование по поляризациям электрона заменяет произведение $(M'_{fn} u)(\bar{u} M'^*_{in})$ на $M'_{fn}(\hat{p} + m)M_{in}^*$, так что член (107,14) в амплитуде M_{fi} принимает вид

$$Z'^2 i\pi \delta(p^2 - m^2) \{M'_{fn}(\hat{p} + m)M'^*_{in}\}.$$

¹⁾ Здесь необходимо некоторое уточнение. Электрон как стабильная частица не может в действительности превратиться в другую совокупность реальных частиц. Мы можем, однако, формально рассматривать в качестве последних некоторые воображаемые частицы с такими массами, которые бы допускали такое превращение. Получающееся соотношение надо понимать тогда в смысле аналитического продолжения к реальным значениям масс.

По этому члену в мнимой части можно восстановить весь полюсной член в амплитуде рассеяния; согласно (80,5) находим

$$M_{fi} = - \frac{Z'^2 \{M'_{fn}(\hat{p} + m) M'^*_{in}\}}{p^2 - m^2 + i0}, \quad p^2 \rightarrow m^2.$$

С другой стороны, вычисление этой же амплитуды непосредственно по диаграмме (107,8) дает

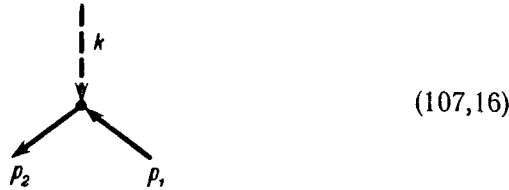
$$iM_{fi} = iM'_{fn} \cdot i\mathcal{G}(p) \cdot iM'^*_{in}.$$

Сравнение обеих формул подтверждает написанное выше предельное выражение для $\mathcal{G}(p)$ (первый член в (107,9)), причем¹⁾

$$Z' = \sqrt{Z_1}. \quad (107,15)$$

Покажем теперь, что после установления требуемого предельного вида электронного пропагатора уже нет необходимости в постановке каких-либо новых условий для вершинного оператора.

Рассмотрим диаграмму



представляющую рассеяние электрона во внешнем поле $A^{(e)}(k)$ (в первом порядке по полю) с учетом всех радиационных поправок. В пределе $k \rightarrow 0$, $p_2 \rightarrow p_1 \equiv p$ собственно-энергетические поправки к линии внешнего поля исчезают (напомним, что эти поправки исчезают вообще при всяком $k^2=0$). Тогда диаграмме будет соответствовать амплитуда

$$M_{fi} = - e\bar{\mathcal{U}}(p)\Gamma(p, p; 0)\mathcal{U}(p) \cdot A^{(e)}(k \rightarrow 0), \quad (107,17)$$

— произведение потенциала $A^{(e)}$ на электронный ток перехода $\bar{\mathcal{U}}\Gamma\mathcal{U}$. Но при $k \rightarrow 0$ потенциал $A^{(e)}(x)$ сводится к независящей от координат и времени постоянной. Такому потенциалу вообще не соответствует никакое физическое поле (частный случай калибровочной инвариантности), так что он не может вызвать никакого изменения электронного тока. Другими словами, в рас-

¹⁾ Прямой вывод равенства (107,15) из определения (107,12) требует сложного исследования; оно дано в статье: F. Dyson, Phys. Rev. 83, 608 (1951).

смаатриваемом пределе ток перехода $\bar{\mathcal{U}}\Gamma\mathcal{U}$ должен просто совпадать со свободным током $\bar{u}\gamma u$:

$$\bar{\mathcal{U}}(p)\Gamma^\mu(p, p; 0)\mathcal{U}(p) = Z_1\bar{u}(p)\Gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p). \quad (107,18)$$

Это требование есть, по существу, тоже выражение определения физического заряда электрона. Легко видеть, что оно автоматически выполняется вне зависимости от значения Z_1 . Действительно, подставив $\mathcal{G}^{-1}(p)$ из (107,10) в тождество Уорда (105,8), найдем

$$\Gamma^\mu(p, p; 0) = \frac{1}{Z_1}\gamma^\mu - \gamma^\mu g(p)(\hat{p} - m) - (\hat{p} - m)g(p)\gamma^\mu,$$

и равенство (107,18) удовлетворяется в силу уравнений $(\hat{p} - m)u = 0$, $\bar{u}(\hat{p} - m) = 0$.

Мы видим, что при составлении амплитуды физического процесса «перенормировочная постоянная» Z_1 вообще выпадает. Мало того, воспользовавшись неопределенностью, возникающей из-за расхождений при вычислении Γ , можно просто потребовать, чтобы было

$$\bar{u}(p)\Gamma^\mu(p, p; 0)u(p) = \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) \quad \text{при} \quad p^2 = m^2, \quad (107,19)$$

т. е. положить $Z_1 = 1$.

Удобство такого определения состоит в том, что отпадает необходимость во введении поправок во внешние электронные линии: имеем просто

$$\mathcal{U}(p) = u(p).$$

В этом можно убедиться и непосредственно, заметив, что при $Z_1 = 1$ массовый оператор (107,11)

$$\mathcal{M} = (\hat{p} - m)g(\hat{p} - m) \quad (107,20)$$

и второй член в (107,12) очевидным образом обращается в нуль. Таким образом, не будут требовать «перенормировки» внешние линии всех реальных частиц — как фотонов, так и электронов¹⁾.

§ 108. Аналитические свойства фотонного пропагатора

Исследование аналитических свойств фотонного пропагатора удобно начать с изучения свойств функции $\Pi(k^2)$. Дело в том, что прямое использование для этой цели определения (100,1)

¹⁾ При перенормировке фотонного пропагатора условие $Z = 1$ возникало как необходимое физическое требование, а после этого исчезновение поправок к внешним фотонным линиям происходит уже автоматически. С формальной точки зрения, однако, ситуации для фотонных и электронных внешних линий аналогичны: при $Z \neq 1$ волновая амплитуда e_μ реального фотона, с учетом поправок, умножалась бы на \sqrt{Z} .

затрудняется калибровочной неоднозначностью операторов $A^\mu(x)$ и проистекающей отсюда неопределенностью их свойств.

Исходя из выражения собственно-энергетической функции фотона через матричные элементы калибровочно-инвариантного оператора тока в § 101 было получено интегральное представление функции $\Pi(k^2)$ (101,11). Обозначив переменную k^2 через t^1 , рассмотрим свойства функции $\Pi(t)$ в плоскости комплексного t .

Из интегрального представления

$$\Pi(t) = \int_0^\infty \frac{\rho(t') dt'}{t-t'+i0} \quad (108,1)$$

видно, что на отрицательной вещественной полуоси функция $\Pi(t)$ вещественна, а во всей остальной плоскости удовлетворяет соотношению симметрии

$$\Pi(t^*) = \Pi^*(t). \quad (108,2)$$

Функция $\Pi(t)$ может иметь особенность лишь в особых точках функции $\rho(t)$. Последние лежат при значениях $t = k^2$, являющихся пороговыми для рождения виртуальным фотоном различных совокупностей реальных частиц. При этих значениях «вступают в игру» новые типы промежуточных состояний в сумме (101,9). Вклад от этих состояний равен нулю ниже порога и отличен от нуля выше порога, что и приводит к особенности функции в самой точке порога. Эти пороговые значения, разумеется, вещественны и неотрицательны²⁾. Поэтому и особые точки функции $\Pi(t)$ лежат на положительной вещественной полуоси переменной t . Если провести разрез по этой полуоси, то функция $\Pi(t)$ будет аналитична во всей разрезанной таким образом плоскости.

Член $+i0$ в знаменателе подынтегрального выражения в (108,1) показывает, что полюс $t' = t$ должен обходить снизу. Это означает, что под значением функции $\Pi(t)$ при вещественном t следует понимать ее значение на верхнем берегу разреза. Используя правило (76,18):

$$\frac{1}{x \pm i0} = P \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \quad (108,3)$$

найдем, что для вещественных t

$$\text{Im } \Pi(t) \equiv \text{Im } \Pi(t+i0) = -\pi\rho(t). \quad (108,4)$$

¹⁾ Не смешивать с обозначением времени!

²⁾ Так, точка $k^2 = 0$ является порогом для рождения трех (или большего нечетного числа) реальных фотонов, точка $k^2 = 4m^2$ — порог для рождения электрон-позитронной пары и т. п.

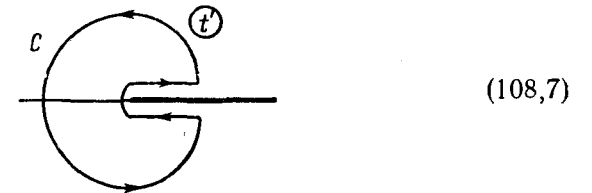
На нижнем же берегу разреза $\text{Im } \Pi$ имеет обратный знак, а $\text{Re } \Pi$ на обоих берегах одинаково. Поэтому скачок функции $\Pi(t)$ на разрезе

$$\Pi(t+i0) - \Pi(t-i0) = -2\pi i\rho(t). \quad (108,5)$$

Само интегральное представление (108,1) можно рассматривать в этом аспекте просто как формулу Коши для аналитической функции $\Pi(t)$. Действительно, применим формулу Коши

$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Pi(t') dt'}{t'-t} \quad (108,6)$$

к контуру



$$(108,7)$$

оггибающему разрез. В предположении достаточно быстрого убывания $\Pi(t)$ на бесконечности, интеграл по большой окружности исчезает, а интегралы по берегам разреза дают следующую формулу (*дисперсионное соотношение*), определяющую функцию $\Pi(t)$ по ее мнимой части:

$$\Pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } \Pi(t'+i0)}{t'-t} dt' = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } \Pi(t')}{t'-t-i0} dt'. \quad (108,8)$$

Подставив сюда (108,4), получим (108,1)¹⁾.

Аналитические свойства функций $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ совпадают со свойствами функции $\Pi(t)$, через которую они выражаются простыми формулами (101,2) и (100,20). Для $\mathcal{D}(t)$ имеем

$$\mathcal{D}(t) = \frac{4\pi}{t} \left(1 + \frac{\Pi(t)}{t} \right). \quad (108,9)$$

На вещественной полуоси ($t > 0$), согласно сказанному выше, надо понимать t как $t+i0$. Мнимую часть $\mathcal{D}(t)$ можно вычислить затем с помощью (108,3) и (108,4), причем надо учесть, что согласно (107,6) $\Pi(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Тогда найдем

$$\text{Im } \mathcal{D}(t) = -4\pi^2\delta(t) + \frac{4\pi}{t^2} \text{Im } \Pi(t) = -4\pi^2\delta(t) - \frac{4\pi^2}{t^2} \rho(t). \quad (108,10)$$

¹⁾ Дисперсионные соотношения были введены в квантовую теорию поля Гелл-Манном, Гольдбергером и Тиррингом (M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, W. E. Thirring, 1954).

Применив теперь к функции $\mathcal{D}(t)$ дисперсионное соотношение вида (108,8), получим для нее следующее интегральное представление:

$$\mathcal{D}(t) = \frac{4\pi}{t+i0} + 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho(t')}{t'^2} \frac{dt'}{t-t'+i0}. \quad (108,11)$$

Эту формулу называют *разложением Челлена — Лемана* (G. Källén, 1952; H. Lehmann, 1954).

Существует тесная связь между положением разреза для функции $\mathcal{D}(t)$ (а тем самым и ее мнимой частью на разрезе), с одной стороны, и условием унитарности для амплитуды процесса $a + b \rightarrow c + d$, изображаемого диаграммой (107,4), с другой стороны (эта реакция, конечно, чисто воображаемая; она не противоречит, однако, законам сохранения, и формальное условие унитарности для нее должно выполняться).

В начальном состоянии (i) этого процесса имеются две «классические» частицы a и b , а в конечном — две другие c и d . Условие унитарности (72,2)¹⁾:

$$T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_n T_{fn} T_{in}^* \delta^{(4)}(P_f - P_i); \quad (108,12)$$

суммирование в правой стороне производится по всем физическим «промежуточным» состояниям n . В данном случае этими состояниями являются, очевидно, состояния систем реальных пар и фотонов, которые могут быть рождены виртуальным фотоном k , т. е. как раз те состояния, которые фигурируют в матричных элементах в определении функции $\rho(k^2)$ (101,9). Амплитуды M_{fi} и M_{if}^* содержат соответственно множители $\mathcal{D}(k^2)$ и $\mathcal{D}^*(k^2)$, а их разность — мнимую часть $\text{Im } \mathcal{D}(k^2)$. Мы видим, таким образом, что уже известная нам (из (108,4)) связь между появлением у \mathcal{D} мнимой части и существованием указанных промежуточных состояний является следствием необходимых требований унитарности.

Мы увидим в дальнейшем, что фактические вычисления по теории возмущений функции $\mathcal{D}(t)$ (или, что то же, функции $\mathcal{P}(t)$) удобно начать с вычисления мнимой части \mathcal{P} , в которой не возникает расходящихся выражений. Но если затем вычислять функцию $\mathcal{P}(t)$ по дисперсионной формуле вида (108,8), то интеграл окажется расходящимся и понадобится производить дополнительные операции вычитания с целью удовлетворить условиям $\mathcal{P}(0) = 0$ и $\mathcal{P}'(0) = 0$. Это вычитание можно, однако, произвести без явного оперирования с расходящимся интегралом.

¹⁾ Напомним, что амплитуды T_{fi} отличаются от амплитуд M_{fi} лишь множителями, — см. (65, 10).

лом. Для этого достаточно применить дисперсионное соотношение (108,8) не к самой функции $\mathcal{P}(t)$, а к функции $\mathcal{P}(t)/t^2$. Тогда $\mathcal{P}(t)$ представится в виде

$$\mathcal{P}(t) = \frac{t^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \mathcal{P}(t')}{t'^2 (t' - t - i0)} dt'. \quad (108,13)$$

Этот интеграл уже сходится, а получаемая таким образом функция $\mathcal{P}(t)$ автоматически удовлетворяет требуемым условиям¹⁾.

§ 109. Регуляризация интегралов Фейнмана

Рассмотренные в предыдущем параграфе физические условия перенормировки позволяют, в принципе, получить однозначным образом конечное значение для амплитуды всякого электродинамического процесса при ее вычислении в любом приближении теории возмущений.

Ознакомимся прежде всего с характером расходимостей, возникающих в интегралах, написанных непосредственно по диаграммам Фейнмана. Важные указания на этот предмет дает подсчет степеней виртуальных 4-импульсов, входящих в подынтегральные выражения для этих интегралов.

Рассмотрим диаграмму n -го порядка (т. е. содержащую n вершин), имеющую N_e электронных и N_γ фотонных внешних линий. Число N_e четно, и электронные линии образуют $N_e/2$ непрерывных последовательностей, каждая из которых начинается и заканчивается внешним концом. Число же внутренних электронных линий в каждой такой последовательности на единицу меньше числа вершин на ней; поэтому полное число внутренних электронных линий в диаграмме равно

$$n - \frac{N_e}{2}.$$

В каждую вершину входит одна фотонная линия; в N_γ вершинах фотонная линия — внешняя, а в остальных $n - N_\gamma -$

¹⁾ О соотношении вида (108,13) говорят как о дисперсионном соотношении «с двумя вычитаниями». Смысл использованного в нем перехода к функции $\mathcal{P}(t)/t^2$ становится в особенности наглядным, если записать (108,13) в виде

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \mathcal{P}(t') dt'}{t' - t - i0} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \mathcal{P}(t')}{t'} dt' - \frac{t}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \mathcal{P}(t')}{t'^2} dt'.$$

Если обозначить первый («нерегуляризованный») интеграл как $\bar{\mathcal{P}}(t)$, то все выражение в правой стороне будет равно

$$\bar{\mathcal{P}}(t) - \bar{\mathcal{P}}(0) - t \bar{\mathcal{P}}'(0).$$

внутренняя. Поскольку каждая внутренняя фотонная линия связывает две вершины, то полное число таких линий равно

$$\frac{n - N_\gamma}{2}.$$

Каждой фотонной внутренней линии сопоставляется множитель $D(k)$, содержащий k в степени -2 . Каждой же электронной внутренней линии сопоставляется множитель $G(p)$, содержащий p (при $p^2 \gg m^2$) в степени -1 . Таким образом, суммарная степень 4-импульсов в знаменателе диаграммы равна

$$2n - \frac{N_e}{2} - N_\gamma.$$

Число же интегрирований (по d^4p или d^4k) в диаграмме равно числу внутренних линий, за вычетом числа $n - 1$ налагаемых на виртуальные импульсы дополнительных условий (из n законов сохранения в вершинах один связывает импульсы внешних концов диаграммы). Учтя еще, получим число интегрирований по всем компонентам 4-импульсов:

$$2(n - N_e - N_\gamma + 2).$$

Наконец, разность между числом интегрирований и степенью импульсов в знаменателе интегрируемого выражения (обозначим ее через r) равна

$$r = 4 - \frac{3}{2}N_e - N_\gamma. \quad (109,1)$$

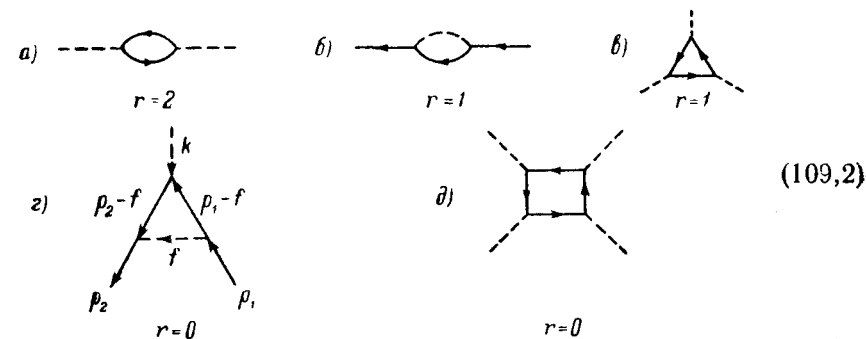
Отметим, что это число не зависит от порядка диаграммы n .

Условия $r < 0$ для диаграммы в целом, вообще говоря, недостаточно для сходимости интеграла; необходимо, чтобы были отрицательны аналогичные числа r' и для внутренних блоков, которые можно было бы выделить из диаграммы. Наличие блоков с $r' > 0$ привело бы к их расходимости, хотя остальные интегрирования в диаграмме и сходились бы при этом даже «с избытком». Условия $r < 0$, однако, достаточно для сходимости простейших диаграмм, в которых $n = N_e + N_\gamma$ и имеется всего одно интегрирование по d^4p .

Если же $r \geq 0$, то интеграл во всяком случае расходится. При этом степень расходимости — не менее чем r , если число r четно, и не менее чем $r - 1$, если r нечетно (уменьшение степени расходимости на 1 в последнем случае связано с обращением в нуль интеграла от произведений нечетного числа 4-векторов при интегрировании по всему 4-пространству). Степень расходимости может увеличиться при наличии внутренних блоков с $r' > 0$.

Отметим, что так как N_e и N_γ — целые положительные числа, то из (109,1) видно, что существует лишь несколько пар значений этих чисел, при которых $r \geq 0$. Перечислим простейшие

диаграммы каждого из таких типов, но сразу же исключим из них случаи $N_e = N_\gamma = 0$ (вакуумные петли) и $N_e = 0$, $N_\gamma = 1$ (среднее значение вакуумного тока), поскольку они не имеют физического смысла и соответствующие диаграммы должны просто отбрасываться, как уже было указано в § 100. Остальные случаи таковы:



(109,2)

В первом из этих случаев расходимость квадратичная, а во всех остальных ($r = 0$ или $r = 1$) — логарифмическая.

Диаграмма (109,2, з) — первая поправка к вершинному оператору. Она должна удовлетворять условию (107,19), которое запишем здесь в виде

$$\bar{u}(p) \Lambda^\mu(p, p; 0) u(p) = 0 \quad \text{при } p^2 = m^2, \quad (109,3)$$

где

$$\Lambda^\mu = \Gamma^\mu - \gamma^\mu. \quad (109,4)$$

Обозначим интеграл Фейнмана, записанный непосредственно по диаграмме, посредством $\bar{\Lambda}^\mu(p_2, p_1; k)$. Этот интеграл логарифмически расходится и сам по себе условию (109,3) не удовлетворяет. Мы, однако, получим величину, удовлетворяющую этому условию, образовав разность

$$\Lambda^\mu(p_2, p_1; k) = \bar{\Lambda}^\mu(p_2, p_1; k) - \bar{\Lambda}^\mu(p_1, p_1; 0) \Big|_{p_1^2 = m^2}. \quad (109,5)$$

Главный член расходимости в интеграле $\Lambda^\mu(p_2, p_1; k)$ получится, если считать в подынтегральном выражении 4-импульс виртуального фотона f сколь угодно большой величиной. Он имеет вид¹⁾

$$-4\pi i e^2 \int \frac{\gamma^\nu \hat{f} \gamma^\mu \hat{f} \gamma_\nu}{f^2 \cdot f^2 \cdot f^2} \frac{d^4 f}{(2\pi)^4}$$

¹⁾ Полное выражение интеграла написано в § 114 — см. (114,2).

и не зависит от значений 4-импульсов внешних линий. Поэтому в разности (109,5) расходимость сокращается и получается конечная величина. О такой операции устранения расходимости путем вычитаний говорят как о *регуляризации* интеграла.

Подчеркнем, что возможность регуляризации интеграла $\Lambda^\mu(p_2, p_1; k)$ путем одного вычитания обеспечивается тем, что в данном случае расходимость — лишь логарифмическая, т. е. наименее сильная из всех возможных. Если бы в интеграле содержались расходимости различных порядков, то одно вычитание при $k = 0$ могло бы оказаться недостаточным для устранения всех расходящихся членов.

После определения первой поправки в Γ^μ (т. е. первого члена разложения Λ^μ) первая поправка в электронном пропагаторе (диаграмма (109,2, a)) может быть вычислена по тождеству Уорда (105,8), которое можно записать также и в виде

$$\frac{\partial \mathcal{M}(p)}{\partial p_\mu} = \Lambda^\mu(p, p; 0), \quad (109,6)$$

введя массовый оператор \mathcal{M} вместо \mathcal{G} и Λ^μ вместо Γ^μ . Это уравнение должно быть проинтегрировано с граничным условием

$$\bar{u}(p) \mathcal{M}(p) u(p) = 0 \quad \text{при} \quad p^2 = m^2, \quad (109,7)$$

следующим из (107,20).

Наконец, для вычисления первого члена разложения поляризаационного оператора обратимся к тождеству (105,14); после упрощения по двум парам индексов оно дает уравнение

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial k_\sigma \partial k^\sigma} = 2\mathcal{P},$$

связывающее скалярные функции $\mathcal{P} = \frac{1}{3} \mathcal{P}_\mu^\mu$ и $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mu\rho}{}^{\mu\rho}$. Обе эти функции зависят только от скалярной же переменной k^2 , и поэтому находим

$$2k^2 \mathcal{P}''(k^2) + \mathcal{P}'(k^2) = \frac{4\pi}{3} \mathcal{P}(k^2), \quad (109,8)$$

где штрихи означают дифференцирование по k^2 . Ввиду условия $\mathcal{P}'(0) = 0$ из этого уравнения ясно, что должно быть и

$$\mathcal{P}(0) = 0. \quad (109,9)$$

В первом приближении теории возмущений $\mathcal{P}(k^2)$ определяется диаграммой (109,2, d) (с 4-импульсами концов $k, k, 0, 0$). Соответствующий интеграл Фейнмана (обозначим его через $\bar{\mathcal{P}}(k^2)$) расходится логарифмически, и его регуляризация осуществляется одним вычитанием по условию (109,9):

$$\mathcal{P}(k^2) = \bar{\mathcal{P}}(k^2) - \bar{\mathcal{P}}(0).$$

После этого $\mathcal{P}(k^2)$ определяется решением уравнения (109,8) с граничными условиями $\mathcal{P}(0) = 0$, $\mathcal{P}'(0) = 0$.

В следующем приближении теории возмущений поправка к вершинному оператору ($\Lambda_\mu^{(2)}$) определяется диаграммами (103,10, в — и). Из них неприводимые (103,10, г — е) вычисляются такой же регуляризацией интегралов с помощью одного вычитания согласно (109,5), как и при вычислении поправки первого приближения $\Lambda_\mu^{(1)}$. В приводимых же диаграммах содержащиеся в них внутренние собственно-энергетические и вершинные части более низкого порядка сразу заменяются известными уже (регуляризованными) величинами первого приближения ($\mathcal{P}^{(1)}$, $\mathcal{M}^{(1)}$, $\Lambda_\mu^{(1)}$), после чего получившиеся интегралы регуляризуются снова согласно (109,5)¹⁾. Поправки $\mathcal{P}^{(2)}$ и $\mathcal{M}^{(2)}$ могут быть затем вычислены с помощью уравнений (109,6) и (109,8).

Описанная систематическая процедура дает, в принципе, возможность получить конечные выражения для \mathcal{P} , \mathcal{M} и Λ_μ в любом приближении теории возмущений. Тем самым становится возможным и вычисление амплитуд физических процессов рассеяния, описываемых диаграммами, в которые блоки \mathcal{P} , \mathcal{M} , Λ_μ входят как составные части.

Мы видим, таким образом, что установленные выше (§ 108) физические условия оказываются достаточными для однозначной регуляризации всех встречающихся в теории диаграмм Фейнмана. Это обстоятельство является отнюдь не тривиальным свойством квантовой электродинамики и носит название *перенормируемости*²⁾.

Для фактического вычисления радиационных поправок описанная выше процедура может, однако, оказаться не наиболее простым и рациональным путем. В следующей главе мы увидим, в частности, что целесообразный путь может начинаться с вычисления мнимой части соответствующих величин; эти части даются интегралами, не содержащими расходимостей. Вся величина в целом определяется затем путем аналитического продолжения с помощью дисперсионных соотношений. Тем самым оказывается возможным избежать громоздких вычислений, требуемых для прямой регуляризации путем вычитаний.

¹⁾ В диаграммах же еще более высоких приближений может оказаться необходимым заранее заменить уже регуляризованными значениями также и «четырёххвостые» блоки \mathcal{P} .

²⁾ Математически строгое обоснование теории перенормировок в квантовой электродинамике дано в книге: Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.

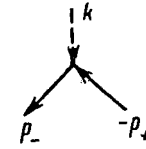
Здесь амплитуда M_{ii} , составленная по диаграмме (110,1), есть

$$iM_{ii} = \sqrt{4\pi} e_{\mu}^* \cdot \sqrt{4\pi} e_{\nu} \frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi}, \quad (110,3)$$

где e_{μ} — 4-вектор поляризации бозона; согласно (14,13) он удовлетворяет уравнению

$$e_{\mu} k^{\mu} = 0.$$

Амплитуде же M_{ni} отвечает диаграмма распада бозона на пару:



Соответствующее выражение:

$$M_{ni} = -e \sqrt{4\pi} e_{\mu} j^{\mu}, \quad j^{\mu} = \bar{u}(p_-) \gamma^{\mu} u(-p_+). \quad (110,4)$$

Подставив (110,3—4) в (110,2), получим

$$2e_{\mu}^* e_{\nu} \text{Im} \mathcal{P}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{|p|}{\varepsilon} \sum_{\text{поляризация}} j^{\mu*} j^{\nu} e_{\mu}^* e_{\nu}. \quad (110,5)$$

При этом $p = p_- = -p_+$ и $\varepsilon = \varepsilon_+ + \varepsilon_- = 2\varepsilon_+$ — импульсы и суммарная энергия пары в системе ее центра инерции; интегрирование производится по направлениям p , а суммирование — по поляризациям обеих частиц.

Усредним теперь обе стороны равенства (110,5) по поляризациям бозона. Усреднение осуществляется формулой

$$\overline{e_{\mu}^* e_{\nu}} = -\frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right)$$

(ср. ниже (117,5)). Приняв во внимание поперечность тензора $\mathcal{P}^{\mu\nu}$ и вектора j^{μ} ($\mathcal{P}^{\mu\nu} k_{\nu} = 0$, $j^{\mu} k_{\mu} = 0$) и заменив $\mathcal{P}_{\mu}^{\mu} = 3\mathcal{P}$, получим в результате

$$2 \text{Im} \mathcal{P} = \frac{1}{12\pi} \frac{|p|}{\varepsilon} \sum_{\text{поляризация}} \int (j j^*) d\omega. \quad (110,6)$$

Суммирование по поляризациям производится обычным образом, интегрирование по $d\omega$ сводится к умножению на 4π , и в результате находим

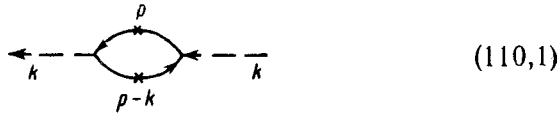
$$2 \text{Im} \mathcal{P} = e^2 \frac{|p|}{3\varepsilon} \text{Sp} \gamma_{\mu} (\hat{p}_- + m) \gamma^{\mu} (\hat{p}_+ - m) = -e^2 \frac{8|p|}{3\varepsilon} (p_+ p_- + 2m^2).$$

ГЛАВА XII

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ

§ 110. Вычисление поляризационного оператора

Приступая к фактическому вычислению радиационных поправок, начнем с вычисления поляризационного оператора (J. Schwinger, 1949; R. P. Feynman, 1949). В первом приближении теории возмущений он дается петлей в диаграмме



Как уже отмечалось, задача облегчается, если начать ее с вычисления мнимой части искомой функции. В свою очередь это вычисление наиболее удобным образом осуществляется путем использования соотношения унитарности. При этом линии виртуального фотона рассматриваются как отвечающие воображаемой «реальной» частице — векторному бозону с массой $M^2 = k^2$, взаимодействующему с электроном по тому же закону, что и фотон. Тем самым (110,1) становится диаграммой «реального» процесса, чем и оправдывается применение к ней условия унитарности.

Таким образом, рассматриваем (110,1) как диаграмму для амплитуды перехода бозона самого в себя (диагональный элемент S -матрицы) через распад на электрон-позитронную пару. Крестики на диаграмме (110,1) показывают, по каким линиям она должна быть рассечена на две части так, чтобы показать промежуточное состояние, фигурирующее при применении соотношения унитарности. Это состояние содержит электрон с 4-импульсом $p_- = p$ и позитрон с $p_+ = -(p - k)$.

Соотношение унитарности с двухчастичным промежуточным состоянием (72,4) при совпадающих начальном и конечном состояниях дает

$$2 \text{Im} M_{ii} = \frac{|p|}{(4\pi)^2 \varepsilon} \sum_{\text{поляризация}} \int |M_{ni}|^2 d\omega. \quad (110,2)$$

Введем переменную

$$t = k^2 = (p_+ + p_-)^2 = 2(m^2 + p_+ p_-). \quad (110,7)$$

Тогда

$$\varepsilon^2 = t, \quad p^2 = \frac{t}{4} - m^2,$$

и окончательная формула для $\text{Im } \mathcal{P}$ принимает вид

$$\text{Im } \mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t-4m^2}{t}} (t+2m^2), \quad t \geq 4m^2. \quad (110,8)$$

Значение $t = 4m^2$ — пороговое для рождения виртуальным фотоном одной электрон-позитронной пары (ср. примечание на стр. 52); в рассматриваемом приближении теории возмущений ($\sim e^2$) состояние с одной парой является единственным, которое может фигурировать в качестве промежуточного состояния в условии унитарности (110,2). В том же приближении, следовательно при $t < 4m^2$, правая сторона в (110,2) равна нулю, так что

$$\text{Im } \mathcal{P}(t) = 0, \quad t < 4m^2. \quad (110,9)$$

По этой же причине в рассматриваемом приближении разрез для функции $\mathcal{P}(t)$ в плоскости комплексного t простирается

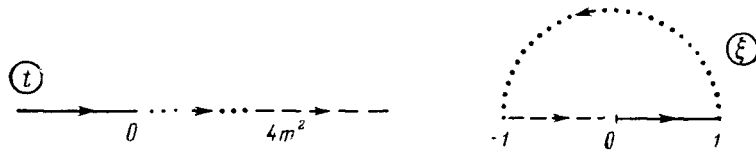


Рис. 18.

лишь от точки $t = 4m^2$ на вещественной оси, и эта точка должна фигурировать в качестве нижнего предела в дисперсионном интеграле (108,13). Таким образом, имеем

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{3\pi} t^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t - i0} \sqrt{\frac{t' - 4m^2}{t'}} \frac{t' + 2m^2}{t'^2}. \quad (110,10)$$

Для дальнейших вычислений удобно ввести вместо t другую переменную, определив ее согласно

$$\frac{t}{m^2} = -\frac{(1-\xi)^2}{\xi}. \quad (110,11)$$

Это преобразование отображает верхнюю полуплоскость комплексного t на полукруг единичного радиуса в верхней полуплоскости комплексного ξ , как показано на рис. 18 (одинаковой штриховкой изображены соответствующие друг другу отрезки в обеих плоскостях). Нефизической области ($0 \leq t/m^2 \leq 4$)

отвечает при этом полуокружность $\xi = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Физическим же областям ($t < 0$ и $t/m^2 > 4$) отвечают правый и левый вещественные радиусы.

Интеграл (110,10) проще всего вычисляется с помощью подстановки

$$\frac{t'}{m^2} = \frac{(1+\xi')^2}{\xi'}, \quad \frac{dt'}{m^2} = -\frac{(1-\xi'^2)d\xi'}{\xi'^2},$$

причем сначала имеем в виду случай $t < 0$ (тогда знаменатель в области интегрирования не обращается в нуль и мнимую добавку $i0$ можно опустить). Выраженный через переменную ξ , результат интегрирования

$$\mathcal{P}(\xi) = \frac{\alpha m^2}{3\pi} \left\{ -\frac{22}{3} + \frac{5}{3} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right) + \left(\xi + \frac{1}{\xi} - 4 \right) \frac{1+\xi}{1-\xi} \ln \xi \right\}. \quad (110,12)$$

Аналитическое продолжение этой формулы определит функцию $\mathcal{P}(t)$ и в области $t > 4m^2$: для этого надо положить в ней $\xi = |\xi| e^{i\pi}$ (при этом логарифм дает вклад в мнимую часть: $\ln \xi = \ln |\xi| + i\pi$)¹⁾. Для нефизической области надо положить $\xi = e^{i\varphi}$, и тогда

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\alpha m^2}{3\pi} \left\{ -\frac{5}{3} \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 4 + \left(2 + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \varphi \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right\}, \quad (110,13)$$

$$\frac{t}{4m^2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

В предельном случае малых $|t|$ (т. е. $\xi \rightarrow 1$) эти формулы дают

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{t^2}{m^2}, \quad |t| \ll 4m^2. \quad (110,14)$$

В обратном же случае больших $|t|$ (т. е. $\xi \rightarrow 0$) получим

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{3\pi} |t| \ln \frac{|t|}{m^2}, \quad -t \gg 4m^2, \quad (110,15)$$

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\alpha}{3\pi} t \left(\ln \frac{t}{m^2} - i\pi \right), \quad t \gg 4m^2.$$

По смыслу теории возмущений полученные формулы справедливы до тех пор, пока $\mathcal{P}/4\pi \ll D^{-1} = t/4\pi$. Поэтому условие применимости формул (110,15):

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|t|}{m^2} \ll 1. \quad (110,16)$$

¹⁾ Осуществляемое таким образом аналитическое продолжение есть, как и требуется, продолжение на верхний берег разреза, поскольку полукруг на плоскости ξ соответствует именно верхней полуплоскости t .

§ 111. Радиационные поправки к закону Кулона

Применим полученные формулы к вопросу о радиационных поправках к закону Кулона. Эти поправки можно наглядно описать как результат *поляризации вакуума* вокруг точечного заряда.

Без учета поправок поле неподвижного центра (с зарядом e_1) дается кулоновским скалярным потенциалом $\Phi \equiv A_0^{(e)} = e_1/r$. Компоненты его трехмерного разложения Фурье:

$$\Phi(\mathbf{k}) \equiv A_0^{(e)}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e_1}{k^2}.$$

С учетом радиационных поправок это поле заменяется «эффективным полем»:

$$A_0^{(e)} = A_0^{(e)} + \mathcal{D}_{\text{ор}} \frac{\mathcal{P}^{0\lambda}}{4\pi} A_\lambda^{(e)} = A_0^{(e)} + \frac{1}{4\pi} \mathcal{P} \mathcal{D} A_0^{(e)} \quad (111,1)$$

(ср. (100,15)). Второй член и дает искомую добавку к скалярному потенциалу. В первом приближении теории возмущений для $\mathcal{P}(k^2)$ надо взять полученное в предыдущем параграфе выражение, а функцию $\mathcal{D}(k^2)$ заменить ее нулевым приближением

$$\mathcal{D}(k^2) \approx D(k^2) = -\frac{4\pi}{k^2}.$$

Таким образом, радиационная поправка к потенциалу поля

$$\delta\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{4\pi e_1}{(k^2)^2} \mathcal{P}(-k^2). \quad (111,2)$$

Для определения вида этой поправки в координатном представлении надо произвести обратное преобразование Фурье:

$$\delta\Phi(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \delta\Phi(\mathbf{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (111,3)$$

Поскольку $\delta\Phi(\mathbf{k})$ — функция лишь от $t = -k^2$, то, произведя интегрирование по углам, получим

$$\delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \delta\Phi(t) \frac{\sin(r\sqrt{-t})}{r} d(-t) = \frac{1}{4\pi^2 r} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\Phi(-y^2) e^{ir y} dy$$

(в последнем преобразовании использована четность подынтегрального выражения как функции от $y = \sqrt{-t}$). Теперь можно сместить контур интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексной переменной y , совместив его с разрезом функции $\mathcal{P}(-y^2)$ (рис. 19). Этот разрез начинается от точки $2im$ и идет

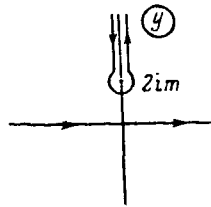


Рис. 19.

вверх по мнимой оси (причем физическому листу соответствует левый берег разреза). Введя вместо y новую переменную согласно $y = ix$, получим

$$\delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{2im}^{\infty} \text{Im} \delta\Phi(x^2) e^{-rx} dx.$$

Наконец, вернувшись к интегрированию по $t = x^2$, имеем окончательно:

$$\delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{4m^2}^{\infty} \text{Im} \delta\Phi(t) e^{-r\sqrt{t}} dt. \quad (111,4)$$

Мнимую часть

$$\text{Im} \delta\Phi(t) = -\frac{4\pi e_1}{t^2} \text{Im} \mathcal{P}(t)$$

берем из (110,8) и после очевидной замены переменной находим

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e_1}{r} + \delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e_1}{r} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty e^{-2mr\xi} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} d\xi \right\} \quad (111,5)$$

(E. Uehling, R. Serber, 1935).

Входящий сюда интеграл может быть вычислен в двух предельных случаях.

Рассмотрим прежде всего малые r ($mr \ll 1$). Разобьем интеграл от первого члена в скобке на два:

$$I = \int_1^\infty e^{-2mr\xi} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} d\xi = \int_1^{\xi_1} \dots d\xi + \int_{\xi_1}^\infty \dots d\xi \equiv I_1 + I_2,$$

причем ξ_1 выбрано так, что $1/mr \gg \xi_1 \gg 1$. В силу этого в первом интеграле можно положить $r = 0$, и тогда

$$I_1 \approx \int_1^{\xi_1} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} d\xi \approx \ln 2\xi_1 - 1.$$

В I_2 можно, напротив, пренебречь 1 под корнем:

$$I_2 \approx \int_{\xi_1}^\infty e^{-2mr\xi} \frac{d\xi}{\xi} = -\ln \xi_1 \cdot e^{-2mr\xi_1} + 2mr \int_{\xi_1}^\infty e^{-2mr\xi} \ln \xi d\xi.$$

В экспоненте и нижнем пределе интеграла можно положить $\zeta_1 = 0$. Делая после этого замену переменной $2mr\zeta = x$, получим

$$I_2 = -\ln 2\zeta_1 + \ln \frac{1}{mr} + \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -\ln 2\zeta_1 + \ln \frac{1}{mr} - C,$$

где $C = 0,577\dots$ — постоянная Эйлера. В интеграле же от второго члена в (111,5) можно сразу положить $r = 0$:

$$I_3 \approx \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^4} d\zeta = \frac{1}{6}.$$

Складывая все три интеграла (причем вспомогательное число ζ_1 сокращается), получаем

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r} \left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{1}{mr} - C - \frac{5}{6} \right) \right], \quad r \ll \frac{1}{m}. \quad (111,6)$$

При $mr \gg 1$ в интеграле существенна область $\zeta - 1 \sim 1/mr \ll 1$. Заменой $\zeta = 1 + \xi$ и соответствующими пренебрежениями он сводится к интегралу

$$e^{-2mr} \int_0^{\infty} e^{-2mr\xi} \frac{3}{2} \sqrt{2\xi} d\xi = \frac{3}{8(mr)^{3/2}} \sqrt{\pi} e^{-2mr}.$$

Таким образом, в этом случае¹⁾

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} \right), \quad r \gg \frac{1}{m}. \quad (111,7)$$

Мы видим, что поляризация вакуума искажает кулоновское поле точечного заряда в области $r \sim 1/m (= \hbar/mc)$, где m — масса электрона. Вне этой области искажение поля убывает по экспоненциальному закону.

Сделаем еще одно замечание, имеющее общий характер. Мы подразумевали до сих пор, что радиационные поправки происходят от взаимодействия фотонного поля с электрон-позитронным. Так, приписывая внутренние замкнутые петли в фотонных собственно-энергетических диаграммах электронам, мы учитывали тем самым взаимодействие фотона с «электронным вакуумом». Но фотон взаимодействует и с полями других частиц; взаимодействие с «вакуумами» этих полей описывается такими же собственно-энергетическими диаграммами, в которых внут-

¹⁾ Происхождение множителя e^{-2mr} в $\delta\Phi(r)$ очевидно уже из вида исходного интеграла (111,4): при больших r в нем существенны значения t вблизи нижнего предела. Другими словами, показатель экспоненциального множителя определяется положением первой особенности функции $\delta\Phi(t)$.

ренние петли приписываются соответствующим частицам. Вклады таких диаграмм по порядку величины отличаются от вкладов электронных диаграмм некоторыми степенями отношения m_e/m , где m — масса данной частицы, а m_e — масса электрона.

Ближайшие по массе к электрону частицы — мюоны и пионы. Численно отношения m_e/m_μ и m_e/m_π близки к α . Поэтому радиационные поправки от этих частиц должны были бы учитываться вместе с электронными поправками следующих порядков. Но если для мюонов вычисление радиационных поправок с помощью существующей теории в принципе допустимо, то для пионов (являющихся сильно взаимодействующими частицами) это невозможно.

Это обстоятельство в принципе ограничивает возможность точных расчетов конкретных эффектов в существующей квантовой электродинамике. Рассмотрение же в сколь угодно высоких приближениях поправок от одного лишь фотонно-электронного взаимодействия было бы превышением над допустимой точностью.

Рассмотренные в этом параграфе радиационные поправки к закону Кулона простираются, как мы видели, в области расстояний $r \leq 1/m_e$. Мы можем теперь добавить, что полученные формулы становятся недостаточными на расстояниях $r < 1/m_\mu$ (или $1/m_\pi$), где становятся существенными также и эффекты поляризации вакуума других частиц.

§ 112. Вычисление мнимой части поляризаационного оператора по интегралу Фейнмана

При прямом вычислении по диаграмме (петля на диаграмме (110,1)) поляризаационный оператор в первом приближении теории возмущений давался бы интегралом

$$\frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi} \rightarrow -e^2 \int \text{Sp} \gamma^\mu G(p) \gamma^\nu G(p-k) \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \quad (112,1)$$

Однако этот интеграл, взятый по всему четырехмерному p -пространству, квадратично расходится, и для получения конечного результата должна была бы быть произведена его регуляризация по описанному в § 109 правилам.

Мы не будем воспроизводить здесь полностью такой вывод, но покажем, каким образом можно вычислить по интегралу (112,1) мнимую часть поляризаационного оператора (которая была определена нами в § 110 с помощью условия унитарности); этот вывод содержит в себе ряд поучительных моментов.

Мнимая часть интеграла (112,1) не содержит расходимости и не требует поэтому регуляризации. Для скалярной функции

$\text{Im } \mathcal{P} = 1/3 \text{ Im } \mathcal{P}_\mu^{\text{II}}$ имеем

$$\text{Im } \mathcal{P} = \text{Im} \left\{ i \frac{4\pi e^2}{3(2\pi)^4} \int \frac{\text{Sp } \gamma^\mu (\hat{p} + m) \gamma_\mu (\hat{p} - \hat{k} + m)}{(p^2 - m^2 + i0) [(p - k)^2 - m^2 + i0]} d^4 p \right\}.$$

(Для краткости записи в последующих промежуточных формулах будем опускать знак Im , закрывая глаза на расходимость вещественной части этого интеграла.) После вычисления следа интеграл принимает вид

$$\mathcal{P}(k^2) = \int \frac{i\varphi(p) d^4 p}{(p^2 - m^2 + i0) [(p - k)^2 - m^2 + i0]}, \quad (112,2)$$

$$\varphi(p) = \frac{2e^2}{3\pi^3} (2m^2 + pk - p^2).$$

Пусть $k^2 > 0$. Переходим к системе отсчета, в которой $k = (k_0, 0)$. В этой системе

$$(p - k)^2 = (p_0 - k_0)^2 - p^2.$$

Введя также обозначение $\varepsilon = \sqrt{p^2 + m^2}$ (ε не совпадает с «энергией» виртуального электрона $p_0!$), перепишем (112,2) в виде

$$\mathcal{P}(k^2) = \int d^3 p \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{i\varphi(p_0, \mathbf{p})}{(p_0^2 - \varepsilon^2 + i0) [(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2 + i0]}, \quad (112,3)$$

$$\varphi(p_0, \mathbf{p}) = \frac{2e^2}{3\pi^3} (m^2 + \varepsilon^2 + p_0 k_0 - p_0^2).$$

Подынтегральное выражение имеет четыре полюса по переменной p_0 :

$$\begin{aligned} a) p_0 &= \varepsilon - i0, & a') p_0 &= -\varepsilon + i0, \\ b) p_0 &= k_0 - \varepsilon + i0, & b') p_0 &= k_0 + \varepsilon - i0. \end{aligned}$$

На рис. 20 показано расположение этих полюсов; для определенности будем считать, что $k_0 > 0$ (окончательный ответ есть функция от k_0^2 и от знака k_0 не зависит). Вычислим скачок функции $\mathcal{P}(t)$, испытываемый ею на разрезе в плоскости комплексной переменной $t = k^2 = k_0^2$ или, что то же самое, на вещественной оси в плоскости комплексного k_0 . Вещественная часть функции $\mathcal{P}(t)$ непрерывна на разрезе, так что скачок

$$\Delta \mathcal{P}(t) = 2i\mathcal{P}(t). \quad (112,4)$$

Прежде всего покажем, каким образом уже по виду интеграла можно установить положение разреза. Обозначим внутренний интеграл в (112,3) (интеграл по dp_0) через $I(\mathbf{p}, k_0)$. До тех пор, пока верхние и нижние полюсы на рис. 20 находятся на конечных расстояниях друг от друга, путь интегрирования

по p_0 можно увести вдаль от полюсов (пунктирная линия на рисунке). Поэтому очевидно, что в этом случае интеграл $I(\mathbf{p}, k_0)$ не изменится при бесконечно малом смещении полюсов b и b' вниз или вверх от вещественной оси, т. е. при замене $k_0 \rightarrow k_0 \pm i\delta$, $\delta \rightarrow 0$. Другими словами, значения $I(\mathbf{p}, k_0)$ при стремлении k_0 к своему вещественному значению сверху или снизу будут одинаковы, так что $I(\mathbf{p}, k_0)$ не даст вклада в скачок $\Delta \mathcal{P}$. Ситуация изменится, лишь если два полюса (при $k_0 > 0$ это могут быть полюсы a и b) окажутся как раз один под другим, так что контур интегрирования будет «зажат» между ними и не сможет быть уведен. Таким образом, скачок $\Delta \mathcal{P} \neq 0$, лишь если где-либо в области интегрирования по $d^3 p$ может быть выполнено условие $k_0 - \varepsilon = \varepsilon$, т. е. $k_0 = 2\varepsilon = 2\sqrt{p^2 + m^2}$. Для этого, очевидно, должно быть $k_0 \geq 2m$, т. е. $t \geq 4m^2$.

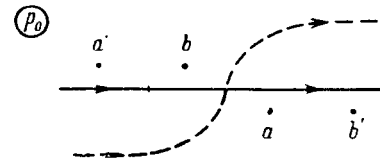


Рис. 20.

Перепишем интеграл $I(\mathbf{p}, k_0)$ в виде

$$I(\mathbf{p}, k_0) = \int_C \frac{i\varphi(p_0, \mathbf{p}) dp_0}{(p_0^2 - \varepsilon^2) [(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2]}, \quad (112,5)$$

опустив члены $i0$ в знаменателе и соответственно изменив контур C интегрирования, как показано на рис. 21. Мы видим, что

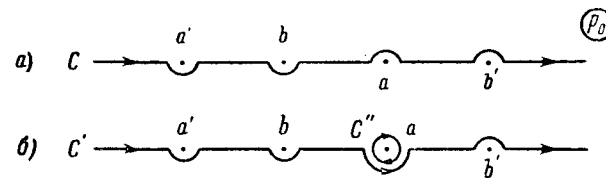


Рис. 21.

возникновение скачка $\Delta \mathcal{P}(t)$ связано с невозможностью увода контура от полюса a (когда контур зажат между a и b). Имея это в виду, заменим контур C на контур C' , проходящий под точкой a , соответственно добавив интеграл по малой окружности

¹⁾ Аналогичным образом убеждаемся в отсутствии разреза при $t = k^2 < 0$. Выбрав в этом случае систему отсчета, в которой $k = (0, \mathbf{k})$, найдем, что полюсы подынтегрального выражения лежат при

$$p_0 = \pm(\varepsilon - i0), \quad p_0 = \pm(\sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m^2} - i0).$$

Оба нижних полюса лежат всегда в правой, а оба верхних — в левой полуплоскости p_0 , так что никакая их пара не может оказаться рядом.

вокруг этой точки (рис. 21, б). После этого контур C' сможет быть всегда беспрепятственно уведен от полюсов, так что интегрирование вдоль него дает вклад лишь в регулярную часть функции $\mathcal{P}(t)$. Для определения же искомого скачка достаточно рассматривать лишь интеграл по окружности C'' , что сводится к взятию вычета в полюсе a . Эта операция может быть осуществлена заменой в подынтегральном выражении:

$$\frac{1}{p_0^2 - \varepsilon^2} \rightarrow -2\pi i \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) \quad (112,6)$$

(знак минус — в связи с тем, что окружность вокруг полюса обходится в отрицательном направлении). При этом следует учитывать в аргументе δ -функции лишь корень $p_0 = +\varepsilon$ (обходится лишь полюс a , но не a'); это условие будет автоматически учтено, если условиться производить интегрирование лишь по половине импульсного 4-пространства: $p_0 > 0$.

После замены (112,6) скачок интеграла $I(\mathbf{p}, k_0)$ вычисляется непосредственно:

$$\begin{aligned} \Delta I &= \{I(\mathbf{p}, k_0 + i\delta) - I(\mathbf{p}, k_0 - i\delta)\}_{\delta \rightarrow +0} = \\ &= -2\pi i \int_0^\infty \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) i\varphi(p_0, \mathbf{p}) \left[\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 + i\delta} - \frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 - i\delta} \right] dp_0. \end{aligned}$$

Используя равенство

$$\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 \pm i\delta} = \mathcal{P} \frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2} \mp i\pi \delta[(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2]$$

(см. (108,3)), получим

$$\Delta I = i(2\pi i)^2 \int_0^\infty \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) \delta[(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2] \varphi(p_0, \mathbf{p}) dp_0.$$

Аргументы δ -функций можно переписать в инвариантном виде, вычитая и прибавляя к ним p^2 :

$$p_0^2 - \varepsilon^2 = p^2 - m^2, \quad (k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 = (k - p)^2 - m^2.$$

После этого находим окончательно

$$\Delta \mathcal{P}(k^2) = i(2\pi i)^2 \int_{p_0 > 0} d^4 p \cdot \varphi(p) \delta(p^2 - m^2) \delta[(p - k)^2 - m^2]. \quad (112,7)$$

Ввиду наличия δ -функций интегрирование производится фактически лишь в области пересечения гиперповерхностей

$$p^2 = m^2, \quad (p - k)^2 = m^2. \quad (112,8)$$

Поскольку в этой области все 4-векторы p времениподобны, то условие интегрирования по $p_0 > 0$ имеет инвариантный характер (верхняя полость конуса $p^2 = m^2$).

Сравним (112,7) с исходной формулой (112,2). Мы видим, что скачок функции $\mathcal{P}(t)$ на разрезе в плоскости t можно получить, если в исходном фейнмановском интеграле произвести замену

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2) \quad (112,9)$$

в пропагаторах, отвечающих пересеченным на диаграмме (110,1) линиям петли (*S. Mandelstam, 1958, R. Cutkosky, 1960*).

Обратим внимание на то, что условия (112,8) выделяют ту область импульсного пространства, в которой линии виртуальных частиц на диаграмме отвечают реальным частицам (или, как говорят, 4-импульсы p и $p - k$ лежат на *массовой поверхности*). Здесь ясно видна связь с методом соотношения унитарности, в котором эти же линии заменялись на линии реальных частиц промежуточного состояния.

Мы видим также математическую причину отсутствия расходимости в мнимой части диаграммы: она определяется интегрированием по конечной области массовой поверхности вместо интегрирования по всему бесконечному импульсному 4-пространству в исходном фейнмановском интеграле.

Чтобы получить теперь из (112,7) выведенную в § 110 формулу, вернемся к системе отсчета, в которой $\mathbf{k} = 0$, и проведем интегрирование по

$$d^4 p = |\mathbf{p}| \varepsilon d\varepsilon dp_0 d\omega.$$

Интегрирование сводится к снятию δ -функций. При этом

$$\delta(p^2 - m^2) dp_0 = \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) dp_0 \rightarrow \frac{1}{2\varepsilon} \delta(p_0 - \varepsilon) dp_0,$$

и затем вторая δ -функция:

$$\begin{aligned} \delta[(p - k)^2 - m^2] d\varepsilon &= \delta[(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2] d\varepsilon = \\ &= \delta(-2\varepsilon k_0 + k_0^2) d\varepsilon \rightarrow \frac{1}{2k_0} \delta\left(\varepsilon - \frac{k_0}{2}\right) d\varepsilon. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\Delta \mathcal{P}(t) = -\frac{i\pi^2}{2} \int \sqrt{\frac{t - 4m^2}{t}} \varphi(\varepsilon, \mathbf{p}) d\omega, \quad (112,10)$$

где $t = k^2 = k_0^2$, а значение функции φ берется при

$$p_0 = \varepsilon = \frac{k_0}{2}, \quad p^2 = \varepsilon^2 - m^2 = \frac{k_0^2}{4} - m^2,$$

т. е. равно

$$\varphi(\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{e^2}{3\pi^3} (2m^2 + t)$$

и не зависит от угла. Поэтому интегрирование по $d\Omega$ сводится к умножению на 4π , и мы возвращаемся к (110,8).

В изложенном выводе существен только тот факт, что диаграмма рассекается на две части путем пересечения всего двух линий. Поэтому сформулированное правило остается в силе и для диаграмм, составленных из любых двух блоков, соединенных двумя (электронными или фотонными) линиями. Интеграл, вычисленный путем замены (112,9), определит при этом тот вклад в мнимую часть диаграммы, который в методе соотношения унитарности связан с соответствующим двухчастичным промежуточным состоянием.

§ 113. Электромагнитные формфакторы электрона

Рассмотрим вершинный оператор $\Gamma^\mu = \Gamma^\mu(p_2, p_1; k)$ в случае, когда две электронные линии являются внешними, а фотонная — внутренней. Электронным внешним линиям отвечают множители $u_1 = u(p_1)$ и $\bar{u}_2 = \bar{u}(p_2)$, так что Γ входит в выражение диаграммы в виде произведения

$$j_{fi}^\mu = \bar{u}_2 \Gamma^\mu u_1. \quad (113,1)$$

Как уже отмечалось в § 108, оно представляет собой электронный ток перехода с учетом радиационных поправок. Требования релятивистской и калибровочной инвариантности позволяют установить общий вид матричной структуры этого тока.

Оператор электромагнитного взаимодействия $V = e(jA)$ — истинный скаляр (а не псевдоскаляр), чем выражается сохранение пространственной четности в этих взаимодействиях. Поэтому ток перехода j_{fi} — истинный 4-вектор (а не псевдовектор). Он может выражаться, следовательно, только через истинные же 4-векторы, составленные из имеющихся в нашем распоряжении двух 4-векторов p_1 и p_2 (третий $k = p_2 - p_1$) и биспиноров u_1 и u_2 . Таких независимых 4-векторов, билинейных по \bar{u}_2 и u_1 , есть всего три:

$$\bar{u}_2 \gamma u_1, \quad (\bar{u}_2 u_1) p_1, \quad (\bar{u}_2 u_1) p_2,$$

или, что то же,

$$\bar{u}_2 \gamma u_1, \quad (\bar{u}_2 u_1) P, \quad (\bar{u}_2 u_1) k, \quad (113,2)$$

где $P = p_1 + p_2$. Но условие калибровочной инвариантности требует поперечности тока перехода к 4-импульсу фотона k :

$$j_{fi} k = 0. \quad (113,3)$$

Этому условию удовлетворяют первые два из 4-векторов (113,2): первый в силу уравнений Дирака

$$(\hat{p}_1 - m) u_1 = 0, \quad \bar{u}_2 (\hat{p}_2 - m) = 0, \quad (113,4)$$

а второй — потому, что $Pk = 0$. Ток j_{fi} представляется линейной комбинацией этих двух 4-векторов:

$$j_{fi}^\mu = f_1 (\bar{u}_2 u_1) P^\mu + f_2 (\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1),$$

где f_1, f_2 — инвариантные функции; их называют *электромагнитными формфакторами* электрона.

Так как 4-импульсы p_1 и p_2 относятся к свободному электрону, то $p_1^2 = p_2^2 = m^2$, и из трех 4-векторов p_1, p_2, k (связанных равенством $k = p_2 - p_1$) можно составить всего одну независимую скалярную переменную, в качестве которой выберем k^2 . Тогда формфакторы — функции k^2 .

Выражение для тока можно представить и в других видах, с другим выбором двух независимых членов. Используя уравнение (113,4) и правила коммутации матриц γ , легко убедиться, что

$$(\bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) k_\nu = -2m (\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1) + (\bar{u}_2 u_1) P^\mu, \quad (113,5)$$

где $\sigma^{\mu\nu} = 1/2 (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$. Коэффициент при таком члене имеет, как мы увидим, важный физический смысл, так что будем писать

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu f(k^2) - \frac{1}{2m} g(k^2) \sigma^{\mu\nu} k_\nu, \quad (113,6)$$

где f, g — два других формфактора; смысл выделения множителя $1/2m$ выяснится ниже¹⁾. Для краткости мы пишем вместо тока вершинный оператор, подразумевая, что он должен браться «в обкладках» $\bar{u}_2 \dots u_1$.

Для выяснения свойств формфакторов рассмотрим диаграмму (107,16) процесса взаимодействия электрона с внешним полем. Соответствующая ей амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = -e j_{fi}^\mu \mathcal{A}_\mu^{(e)}(k), \quad (113,7)$$

где $\mathcal{A}_\mu^{(e)}$ — эффективное (с учетом поляризации вакуума) внешнее поле.

Амплитуда (113,7) описывает два канала реакции. В канале рассеяния инвариантная переменная

$$t = k^2 = (p_2 - p_1)^2 \leq 0.$$

¹⁾ Во избежание недоразумений напомним, что в определении (113,6) предполагается, что k — 4-импульс входящей в вершину фотонной линии; для выходящей линии знак второго члена был бы обратным.

Заменяя же $p_2 \rightarrow p_-$, $p_1 \rightarrow -p_+$, мы перейдем к аннигиляционному каналу, отвечающему рождению пары с 4-импульсами p_- и p_+ . В этом канале

$$t = (p_- + p_+)^2 \geq 4m^2.$$

Область же значений $0 < t < 4m^2$ — нефизическая.

Обратимся к условию унитарности (108,12). В канале рассеяния ($t < 0$) нет в данном случае физических промежуточных состояний: один свободный электрон не может изменить свой импульс или родить какие-либо другие частицы. Нет их, конечно, и в нефизической области. Поэтому при $t < 4m^2$ правая сторона в равенстве (108,12) отсутствует, так что матрица T_{fi} (или, что то же, M_{fi}) эрмитова:

$$M_{fi} = M_{if}^*.$$

Перестановка начального и конечного состояний означает перестановку p_2 и p_1 , а тем самым замену $k \rightarrow -k$. Представив M_{fi} в виде (113,7), имеем поэтому

$$j_{fi}^\mu \mathcal{A}_\mu^{(e)}(k) = j_{if}^{\mu*} \mathcal{A}_\mu^{(e)*}(-k).$$

Но $\mathcal{A}^{(e)}(-k) = \mathcal{A}^{(e)*}(k)$, так что отсюда следует, что матрица токов перехода тоже эрмитова:

$$j_{fi} = j_{if}^* \quad \text{при } t < 4m^2. \quad (113,8)$$

Используя свойства матриц γ (21,7), легко проверить, что

$$\begin{aligned} (\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1) &= (\bar{u}_1 \gamma^\mu u_2)^*, \\ (\bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) &= -(\bar{u}_1 \sigma^{\mu\nu} u_2)^*. \end{aligned}$$

Поэтому j_{if}^* отличается от j_{fi} лишь заменой функций $f(t)$ и $g(t)$ на комплексно-сопряженные, а из равенства (113,8) следует тогда, что эти функции вещественны. Таким образом,

$$\text{Im } f(t) = \text{Im } g(t) = 0 \quad \text{при } t < 4m^2. \quad (113,9)$$

В аннигиляционном же канале ($t > 4m^2$) состояние f — пара, которая может превратиться в пару же с другими импульсами (упругое рассеяние) или в какую-либо более сложную систему. Поэтому правая часть условия унитарности отлична от нуля, матрица M_{fi} (а с нею и j_{fi}) не эрмитова, а потому формфакторы комплексны.

Аналитические свойства функций $f(t)$ и $g(t)$ вполне аналогичны рассмотренным в § 108 свойствам функции $\mathcal{P}(t)$ (хотя это и затруднительно доказать столь же прямым способом). Эти функции аналитичны в комплексной плоскости t , разрезанной вдоль положительной вещественной оси $t > 4m^2$, причем

$$f^*(t) = f(t^*), \quad g^*(t) = g(t^*).$$

Условие перенормировки (107,19), примененное к вершинному оператору (113,6), приводит к требованию

$$f(0) = 1. \quad (113,10)$$

Для того чтобы автоматически учесть это условие (при вычислении функции $f(t)$ по ее мнимой части), надо применить дисперсионное соотношение вида (108,8) не к самой функции $f(t)$, а к $(f-1)/t$. Тогда получим дисперсионное соотношение «с одним вычитанием»:

$$f(t) - 1 = \frac{t}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } f(t')}{t'(t'-t-i0)} dt'. \quad (113,11)$$

Для формфактора же $g(t)$ никакие значения физическими требованиями заранее не предписываются. Поэтому для него дисперсионное соотношение пишется «без вычитаний»:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } g(t')}{t'-t-i0} dt'. \quad (113,12)$$

Значение $g(0)$ имеет важный физический смысл: оно дает поправку к магнитному моменту электрона. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим рассеяние нерелятивистского электрона в постоянном, медленно меняющемся в пространстве магнитном поле.

Член в амплитуде рассеяния (113,7), связанный с формфактором $g(k^2)$, имеет вид

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(k^2) (\bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) k_\nu A_\mu^{(e)}(k). \quad (113,13)$$

Для чисто магнитного поля $A^{(e)\mu} = (0, \mathbf{A})$; постоянство поля во времени означает, что 4-вектор $k^\mu = (0, \mathbf{k})$, а медленному изменению поля в пространстве отвечают малые \mathbf{k} (имея в виду дальнейший переход к пределу $\mathbf{k} \rightarrow 0$, сразу пишем в (113,13) $A^{(e)}$ вместо эффективного $\mathcal{A}^{(e)}$). Раскрыв выражение (113,13) и выразив его через трехмерные величины, получим

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(-k^2) (\bar{u}_2 \Sigma u_1) i [\mathbf{k} \mathbf{A}_k],$$

где Σ — матрица (21,21). Произведение $i[\mathbf{k} \mathbf{A}_k]$ заменяем напряженностью магнитного поля \mathbf{H}_k , после чего можно перейти к пределу $\mathbf{k} \rightarrow 0$. Наконец, введя нерелятивистские спинорные амплитуды ω_1, ω_2 согласно (23,12):

$$\bar{u}_2 = \sqrt{2m} (\omega_2^* \ 0), \quad u_1 = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

находим окончательно

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(0) \mathbf{H}_k \cdot 2m (\omega_2^* \sigma \omega_1). \quad (113,14)$$

Сравним это выражение с амплитудой рассеяния в постоянном электрическом поле со скалярным потенциалом Φ_k :

$$M_{fi} = -e(\bar{u}_2 \gamma^0 u_1) \Phi_k \approx -e \Phi_k \cdot 2m(\omega_2^* \omega_1).$$

Мы видим, что электрону в магнитном поле можно приписать дополнительную потенциальную энергию

$$-\frac{e}{2m} g(0) \sigma \mathbf{H}_k.$$

Это значит, что электрон обладает «аномальным» магнитным моментом

$$\mu' = \frac{e\hbar}{2mc} g(0) \quad (113,15)$$

(обычные единицы) в дополнение к «нормальному» дираковскому магнитному моменту $e\hbar/2mc$.

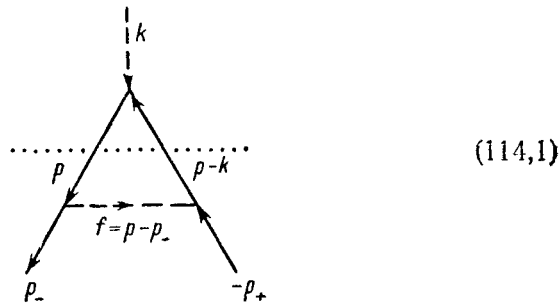
§ 114. Вычисление формфакторов электрона

Обратимся к фактическому вычислению формфакторов электрона (*J. Schwinger, 1949*).

В нулевом приближении теории возмущений вершинный оператор $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$, т. е. электронные формфакторы

$$f = 1, \quad g = 0.$$

Первая радиационная поправка к формфакторам определяется вершинной диаграммой



(с двумя реальными электронными концами и одним виртуальным фотонным концом). Мы начнем с вычисления мнимых частей формфакторов. Как было показано в предыдущем параграфе, они отличны от нуля лишь в аннигиляционном канале ($k^2 > 4m^2$); в соответствии с этим 4-импульсы электронных концов в диаграмме (114,1) отвечают рождающимся электрону и позитрону и обозначены через p_- и $-p_+$. Аналитическое

выражение диаграммы (114,1):

$$-ie\bar{u}(p_-)\Gamma^\mu u(-p_+) = (-ie)^3 \bar{u}(p_-)\gamma^\nu i \int G(p)\gamma^\mu G(p-k)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(f) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \quad (114,2)$$

или, в раскрытом виде,

$$\gamma^\mu f(k^2) - \frac{1}{2m} g(k^2) \sigma^{\mu\nu} k_\nu = \int \frac{i\varphi^\mu(p) d^4 p}{(p^2 - m^2) \{(p-k)^2 - m^2\}}, \quad (114,3)$$

где обозначено

$$\varphi^\mu(p) = -e^2 \frac{\gamma^\nu (\hat{p} + m) \gamma^\mu (\hat{p} - k + m) \gamma_\nu}{4\pi^3 (p_- - p)^2} \quad (114,4)$$

и для краткости опущены множители $\bar{u}(p_-) \dots u(p_+)$; везде ниже подразумевается, что обе стороны равенства берутся в этих «обкладках».

Проведенный на диаграмме (114,1) горизонтальный пунктир рассекает ее на две части таким образом, чтобы показать промежуточное состояние, которое фигурировало бы при вычислении мнимой части формфактора по условию унитарности: это есть состояние электрон-позитронной пары с импульсами, отличными от p_- , p_+ . Это же рассеяние показывает, где в интеграле (114,2) должна быть произведена замена полюсных множителей, если производить вычисление по правилу (112,9) (в (114,3) эти множители выделены в подынтегральном выражении).

Интеграл в (114,3) — того же вида, что и в (112,2). Поэтому мы можем сразу написать результат преобразования в форме (112,10), минуя промежуточные этапы:

$$2\gamma^\mu \text{Im} f(t) - \frac{2}{2m} \sigma^{\mu\nu} k_\nu \text{Im} g(t) = -\frac{\pi^2}{2} \sqrt{\frac{t-4m^2}{t}} \int \varphi^\mu(p) d\omega_p, \quad (114,5)$$

где $t = k^2$, интегрирование производится по направлению вектора p , а 4-векторы $p'_- \equiv p$ и $p'_+ \equiv k - p$ в определении функции $\varphi^\mu(p)$ (114,4) становятся 4-импульсами реальных (а не виртуальных) частиц. Выражение (114,5) относится к системе отсчета, в которой $k = 0$; это — система центра инерции рождающейся пары p_- , p_+ (а тем самым — и «промежуточной» пары p'_- , p'_+). В этой системе, следовательно,

$$k = (k_0, 0), \quad p_- = \left(\frac{k_0}{2}, p_-\right), \quad p_+ = \left(\frac{k_0}{2}, -p_-\right), \quad p = \left(\frac{k_0}{2}, p\right),$$

и легко проверить, что

$$f^2 = (p - p_-)^2 = -2p^2(1 - \cos \theta) = -\frac{t - 4m^2}{2}(1 - \cos \theta), \quad (114,6)$$

где θ — угол между p и p_- . Подставив теперь (114,4) в (114,5) и исключив в подынтегральном выражении матрицы $\gamma^\nu \dots \gamma_\nu$

с помощью формул (22,6), получим

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \operatorname{Im} f(t) - \frac{1}{2m} \sigma^{\mu\nu} k_\nu \operatorname{Im} g(t) = \\ = - \frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \int \frac{d\omega_p}{2\pi(1-\cos\theta)} \gamma^\nu (\hat{p} + m) \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma_\nu = \\ = - \frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \int \frac{d\omega_f}{2\pi(1-\cos\theta)} [-2m^2 \gamma^\mu + 4m(P^\mu + 2f^\mu) + \\ + 2(\hat{p}_+ - \hat{f}) \gamma^\mu (\hat{p}_- + \hat{f})], \end{aligned} \quad (114,7)$$

где введены 4-векторы

$$f = p - p_- = (0, \mathbf{f}), \quad P = p_- - p_+ = (0, 2\mathbf{p}_-). \quad (114,8)$$

Интегрирование сводится теперь к вычислению интегралов

$$(I, I^\mu, I^{\mu\nu}) = \int \frac{(1, f^\mu, f^\mu f^\nu)}{1-\cos\theta} \frac{d\omega_f}{2\pi} \quad (114,9)$$

с каждым из трех перечисленных числителей.

Интеграл I логарифмически расходится при $\theta \rightarrow 0$. Переписав его как

$$I = \int_0^{t-4m^2} \frac{d(f^2)}{f^2} = \int_0^{-(t-4m^2)} \frac{d(f^2)}{f^2},$$

мы видим, что расходимость отвечает малым «массам» виртуального фотона. Таким образом, это — «инфракрасная» расходимость. Мы отложим ее подробное рассмотрение до § 119. Здесь отметим только, что она является фиктивной в том смысле, что при правильном учете всех физических эффектов подобные расходимости взаимно компенсируются и исчезают. Поэтому мы можем произвольным образом «обрезать» интеграл снизу, а в дальнейшем, при расчете реальных физических явлений, устремить предел обрезания к нулю.

Здесь будет проще всего совершать обрезание релятивистски-инвариантным образом. Для этого припишем виртуальному фотону f малую, но конечную массу λ ($\lambda \ll m$), т. е. заменим в фотонном пропагаторе $D(\hat{f}^2)$ в (114,2)

$$f^2 \rightarrow f^2 - \lambda^2. \quad (114,10)$$

После этого

$$I = \int_0^{-(t-4m^2)} \frac{d(f^2)}{f^2 - \lambda^2} = \ln \frac{t-4m^2}{\lambda^2}. \quad (114,11)$$

Интеграл I^μ , в котором f^μ — пространственноподобный 4-вектор, должен выражаться через 4-вектор P^μ — из двух имеющих в нашем распоряжении 4-векторов P^μ и k^μ пространственно-

подобен (при произвольных p_+ , p_-) только P^μ . Поэтому $I^\mu = AP^\mu$. Умножив это равенство на P_μ и вычисляя интеграл $P_\mu I^\mu$ в системе центра инерции пары (компоненты 4-векторов f и P — из (114,8)), находим

$$A = \frac{1}{2p^2} \int_{-1}^1 \frac{qp \, d \cos \theta}{1 - \cos \theta} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta = -1.$$

Таким образом,

$$I^\mu = -P^\mu. \quad (114,12)$$

Аналогичным образом вычисляется интеграл

$$I^{\mu\nu} = \frac{1}{4} P^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \right) + \frac{1}{4} P^\mu P^\nu \quad (114,13)$$

(для определения коэффициентов в этом выражении достаточно вычислить интегралы I^μ и $I^{\mu\nu} P_\mu P_\nu$).

Дальнейшее вычисление происходит следующим образом. Подставив (114,11—13) в (114,7), мы получим между «обкладками» $\bar{u}(p_-) \dots u(-p_+)$ сумму ряда членов. В каждом из них «прогоняем» (с помощью правил коммутации матриц γ^μ) множитель \hat{p}_+ направо, а \hat{p}_- — налево; после этого можно заменить $\hat{p}_- \rightarrow m$, $\hat{p}_+ \rightarrow -m$, поскольку

$$\bar{u}(p_-) \hat{p}_- = m \bar{u}(p_-), \quad \hat{p}_+ u(-p_+) = -m u(-p_+).$$

В получающейся в результате сумме

$$-4(p_+ p_-) I \gamma^\mu + 2m P^\mu - 3P^2 \gamma^\mu$$

можно еще заменить P^μ на эквивалентное ему (в обкладках!) выражение

$$P^\mu \rightarrow 2m \gamma^\mu + \sigma^{\mu\nu} k_\nu$$

(ср. (113,5)). Наконец, выразив все величины через инвариант $t = k^2$ ($2p_+ p_- = t - 2m^2$, $P^2 = 4m^2 - t$) и сравнив затем обе стороны равенства (114,7), получим следующие формулы для мнимых частей формфакторов:

$$\operatorname{Im} g(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}}, \quad (114,14)$$

$$\operatorname{Im} f(t) = \frac{\alpha}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \left[-3t + 8m^2 + 2(t-2m^2) \ln \frac{t-4m^2}{\lambda^2} \right]. \quad (114,15)$$

Инфракрасная расходимость имеется только в $\operatorname{Im} f(t)$.

Сами функции $f(t)$ и $g(t)$ вычисляются по их мнимым частям с помощью формул (113,11—12). Интегрирование в этих формулах удобно произвести с помощью тех же подстановок,

которые были использованы в § 110 при вычислении $\mathcal{P}(t)$. Выраженные через переменную ξ (110,11) формфакторы определяются формулами

$$g(\xi) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\xi \ln \xi}{\xi^2 - 1}, \quad (114,16)$$

$$f(\xi) - 1 = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 2 \left(1 + \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2} \ln \xi \right) \ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3(1 + \xi^2) + 2\xi}{2(1 - \xi^2)} \ln \xi + \right. \\ \left. + \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2} \left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2 \xi - 2F(\xi) + 2 \ln \xi \ln(1 + \xi) \right] \right\}, \quad (114,17)$$

где $F(\xi)$ — функция Спенса, определенная согласно (127,19).

В нефизической области ($0 < t/m^2 < 4$) надо положить $\xi = e^{i\varphi}$. Выражения для формфакторов могут тогда быть приведены к виду

$$f(\varphi) = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \ln \frac{m}{\lambda} + \frac{3 \cos \varphi + 1}{2 \sin \varphi} \varphi + \frac{2}{\operatorname{tg} \varphi} \int_0^{\varphi/2} \xi \operatorname{tg} \xi d\xi \right\}, \quad (114,18)$$

$$g(\varphi) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (114,19)$$

Наконец, приведем предельные формулы для малых $|t|$:

$$\left. \begin{aligned} f(t) - 1 &= \frac{\alpha t}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right), \quad |t| \ll 4m^2, \\ g(t) &= \frac{\alpha}{2\pi}, \end{aligned} \right\} \quad (114,20)$$

и для больших $|t|$:

$$f(t) - 1 = -\frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{|t|}{m^2} + 2 \ln \frac{m}{\lambda} \ln \frac{|t|}{m^2} \right) + \begin{cases} i \frac{\alpha}{2} \ln \frac{t}{\lambda^2}, & t \gg 4m^2, \\ 0 & -t \gg 4m^2, \end{cases} \quad (114,21)$$

$$g(t) = -\frac{\alpha m^2}{\pi t} \ln \frac{|t|}{m^2} + \begin{cases} i \frac{\alpha m^2}{t}, & t \gg 4m^2, \\ 0, & -t \gg 4m^2. \end{cases} \quad (114,22)$$

Формула (114,21) справедлива (в отношении $\operatorname{Re} f$), как говорят, с дважды логарифмической точностью, т. е. с точностью до квадратов больших логарифмов¹⁾.

¹⁾ Выражение для вершинного оператора в случае одного виртуального и одного реального электронных концов и реального фотонного конца — см. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, изд. 3, «Наука», 1969, § 36, стр. 505.

§ 115. Аномальный магнитный момент электрона

Как уже было указано в § 113, значение $g(0)$ определяет радиационную поправку к магнитному моменту электрона. Если ставить себе целью вычисление лишь этой величины, то вычисление всей функции $g(t)$, конечно, не обязательно. С помощью (114,14) и (113,12) имеем

$$g(0) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g(t')}{t'} dt' = \frac{\alpha}{4\pi} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2} \sqrt{x-1}} = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (115,1)$$

С учетом этой поправки магнитный момент электрона

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right). \quad (115,2)$$

Эта формула была впервые получена Швингером (1949).

В следующем приближении ($\sim \alpha^2$) радиационные поправки в формфакторах изображаются семью диаграммами (103,10, $v-u$). Определение даже одного только значения $g(0)$ в этом приближении требует очень сложных вычислений. Отсылая за деталями вычислений к оригинальным статьям, приведем лишь окончательное значение поправки второго приближения¹⁾:

$$g^{(2)}(0) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left(\frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{3}{4} \zeta(3) \right) = -0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2}, \quad (115,3)$$

так что магнитный момент электрона

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right). \quad (115,4)$$

Остановимся особо на вкладе поляризации вакуума в поправку $g^{(2)}(0)$. Это — диаграмма



$$(115,5)$$

содержащая фотонную собственно-энергетическую часть. Она отличается от диаграммы (114,1) первого приближения лишь тем, что вместо фотонного пропагатора $D(f^2) = 4\pi/f^2$ в ней

¹⁾ См. С. Sommerfield, Phys. Rev. **107**, 328 (1957); Ann. Phys. **5**, 26 (1958) и A. Peterman, Helv. Phys. Acta **30**, 409 (1957). Проведение вычислений по методу унитарности — см. М. В. Терентьев, ЖЭТФ **43**, 619 (1962).

стоит произведение

$$D(f^2) \frac{\mathcal{P}(f^2)}{4\pi} D(f^2) = \frac{4\pi}{f^2} \frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2},$$

где $\mathcal{P}(f^2)$ — вычисленный в § 110 поляризационный оператор в первом ($\sim \alpha$) приближении. Частично повторив, с этим изменением, произведенные в предыдущем параграфе вычисления, получим для «поляризационной части» поправки

$$\text{Im } g_{\text{поляр}}^{(2)}(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}} \int_{-1}^1 \frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} \frac{1+3\cos\theta}{2} d\cos\theta, \quad (115,6)$$

причем

$$f^2 = -\frac{t-4m^2}{2}(1-\cos\theta) \quad (115,7)$$

(см. (114,6)). Вычисление этого интеграла, а затем интеграла

$$g_{\text{поляр}}^{(2)}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \text{Im } g_{\text{поляр}}^{(2)}(t') \frac{dt'}{t'} \quad (115,8)$$

приводит к значению

$$g_{\text{поляр}}^{(2)}(0) = \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left(\frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3} \right) = 0,016 \frac{\alpha^2}{\pi^2}; \quad (115,9)$$

оно составляет $\sim 5\%$ всего значения (115,3).

Мы уже отмечали (в конце § 111), что определенный вклад в радиационные поправки могут вносить также и эффекты поляризации вакуума других частиц. Вклад мюонного вакуума в аномальный магнитный момент электрона мы получим по тем же формулам (115,6—8), в которых (в том числе в определении переменной f^2) m есть по-прежнему масса электрона (m_e), но в качестве параметра m , входящего в выражение функции $\mathcal{P}(f^2)$, должна быть взята масса мюона (m_μ). $\mathcal{P}(f^2)/f^2$ есть функция только от отношения f^2/m_μ^2 . В интеграле же (115,8) существенна область значений t (а потому и f^2), сравнимых с m_e^2 ; поэтому отношение $f^2/m_\mu^2 \sim (m_e/m_\mu)^2 \ll 1$ и для оценки интегралов можно воспользоваться предельной формулой (110,14), согласно которой

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} = -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{f^2}{m_\mu^2}.$$

Отсюда видно, что вклад в $g^{(2)}(0)$, обязанный мюонной поляризацией вакуума, имеет лишний малый множитель $(m_e/m_\mu)^2$.

Обратная ситуация возникает, однако, при применении к магнитному моменту мюона. Поскольку в (115,3) масса частицы не входит, то это значение $g^{(2)}(0)$ относится и к мюону, причем в нем учтен вклад поляризации мюонного же вакуума.

Но вклад от поляризации вакуума других частиц — электронов — оказывается в данном случае значительно больше. Он вычисляется по формулам (115,6—8), в которых надо теперь заменить $m \rightarrow m_\mu$, а в качестве $\mathcal{P}(t)$ подставить электронный поляризационный оператор. В противоположность предыдущему случаю, теперь будет существенна область значений $f^2/m_e^2 \sim (m_\mu/m_e)^2 \gg 1$ и в качестве $\mathcal{P}(f^2)$ нужно взять предельное выражение (110,15):

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|f^2|}{m_e^2}.$$

Вычисление интегралов приводит к значению

$$[g^{(2)}(0)]_{\text{электр поляр}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{3} \ln \frac{m_\mu}{m_e} - \frac{25}{35}\right) = 1,09 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \quad (115,10)$$

(H. Suura, E. H. Wichman, 1957; A. Peterman, 1957).

Сложив со (115,3), получим для магнитного момента мюона

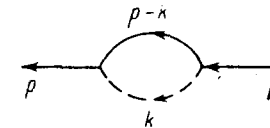
$$\mu_{\text{мюон}} = \frac{e\hbar}{2m_\mu c} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0,76 \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right). \quad (115,11)$$

Заметим, что вклад поляризации мюонного вакуума (115,9) составляет здесь $\sim 2\%$ от всего значения $g^{(2)}(0)$. Вклад такого же порядка (ввиду близости масс) дала бы и пионная поляризация вакуума, которая вообще не может быть вычислена точно. По этой причине не имело бы уже смысла и вычисление поправок $\sim \alpha^3$ к магнитному моменту мюона¹⁾.

§ 116. Вычисление массового оператора

На примере вычисления массового оператора продемонстрируем метод прямой регуляризации интегралов Фейнмана.

В первом неисчезающем приближении массовый оператор представляется петлей в диаграмме



(116,1)

¹⁾ Разумеется, допустимость вообще вычисления поправок к магнитному моменту мюона, предполагающая полную применимость к мюону существующей квантовой электродинамики, не очевидна. Имеющиеся экспериментальные данные подтверждают значение поправки $\sim \alpha$ в (115,11), а поправка $\sim \alpha^2$ находится пока за пределами точности опытов.

Ей отвечает интеграл

$$-i\bar{\mathcal{M}}(p) = (-ie)^2 \int \gamma^\mu G(p-k) \gamma^\nu D_{\mu\nu}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4},$$

подставив пропагаторы и сведя множители $\gamma^\mu \dots \gamma_\mu$ с помощью формул (22,6), получим

$$\bar{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int \frac{2m - \hat{p} + \hat{k}}{[(p-k)^2 - m^2](k^2 - \lambda^2)} d^4k \quad (116,2)$$

(чертой над буквой \mathcal{M} мы отмечаем нерегуляризованное значение интеграла). В фотонный пропагатор введена фиктивная «масса фотона» λ с целью устранения (как и в § 114) инфракрасной расходимости.

Преобразуем интеграл с помощью формулы (127,4), понимая в ней под a_1 и a_2 два множителя в знаменателе (116,2). После простой перегруппировки членов в знаменателе нового интеграла получим

$$\bar{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{2m - \hat{p} + \hat{k}}{[(k - px)^2 - a^2]^2}, \quad (116,3)$$

где

$$a^2 = m^2 x^2 - (p^2 - m^2)x(1-x) + \lambda^2(1-x). \quad (116,4)$$

Замена переменной $k \rightarrow k + px$ приводит интеграл (116,3) к виду, в котором его знаменатель зависит только от квадрата k^2 . При этом, однако, согласно (127,17–18) к интегралу добавится аддитивная постоянная:

$$\bar{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \left\{ \int d^4k \int_0^1 dx \frac{2m - \hat{p}(1-x)}{(k^2 - a^2)^2} - \frac{i\pi^2}{4} \hat{p} \right\} \quad (116,5)$$

(член с \hat{k} в числителе теперь опущен, как обращающийся в нуль при интегрировании по направлениям 4-вектора k , — ср. (127,8)).

Регуляризация этого интеграла заключается в таких вычитаниях, которые привели бы его к выражению вида (107,20). Последнее отличается, прежде всего, тем, что если p — 4-импульс реального электрона, то при умножении на волновую амплитуду $u(p)$ оно обращается в нуль. Не вводя $u(p)$ явно, можно сформулировать это условие как требование обращения $\mathcal{M}(p)$ в нуль при замене

$$\hat{p} \rightarrow m, \quad p^2 \rightarrow m^2. \quad (116,6)$$

Форма интеграла (116,5) удобна при этом тем, что 4-вектор p входит в него только в виде \hat{p} и p^2 (а члены вида kp отсутствуют).

Вычтя из (116,5) такое же выражение с заменой (116,6), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} \left\{ \int d^4k \int_0^1 dx \cdot [2m - \hat{p}(1-x)] \left[\frac{1}{(k^2 - a^2)^2} - \frac{1}{(k^2 - a_0^2)^2} \right] - \right. \\ & \left. - \int d^4k \int_0^1 dx \frac{1-x}{(k^2 - a_0^2)^2} (\hat{p} - m) - \frac{i\pi^2}{4} (\hat{p} - m) \right\}, \quad (116,7) \end{aligned}$$

где

$$a_0^2 = m^2 x^2 + \lambda^2(1-x).$$

Для окончательной регуляризации, однако, должно быть произведено еще одно вычитание: согласно (107,20) при замене (116,6) должно обратиться в нуль не только $\mathcal{M}(p)$ в целом, но и оно же без одного множителя $\hat{p} - m$. Соответствующим вычитанием целиком отбрасываются второй и третий члены в фигурных скобках в (116,7)¹⁾. Первый же интеграл предварительно преобразуем, введя еще одно вспомогательное интегрирование с помощью формулы (127,5), положив в ней $n = 2$ и понимая под a и b соответственно $k^2 - a^2$ и $k^2 - a_0^2$. Тогда интеграл принимает вид

$$(\hat{p} - m) \frac{16\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(\hat{p} + m) [2m - \hat{p}(1-x)] x(1-x)}{[k^2 - a_0^2 + (p^2 - m^2)x(1-x)z]^3}$$

(здесь использовано также тождество $p^2 - m^2 = (\hat{p} - m)(\hat{p} + m)$). Сразу же произведем интегрирование по d^4k . Предполагая, что $p^2 - m^2 < 0$, и воспользовавшись (127,14), получим

$$(\hat{p} - m) \frac{e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(\hat{p} + m) [2m - \hat{p}(1-x)] x(1-x)}{m^2 x^2 + \lambda^2(1-x) + (m^2 - p^2)x(1-x)z}.$$

Теперь остается, опустив временно множитель $(\hat{p} - m)$, вычесть такой же интеграл с заменой (116,6); после простых приведений

¹⁾ Тем самым мы в процессе «перенормировки на ходу» (см. стр. 47) опускаем поправки к перенормировочной константе Z_1 (§ 107). Соответствующие интегралы логарифмически расходятся. Если ввести «параметр обрезания» $\Lambda^2 \gg m^2, p^2$, ограничив область интегрирования по d^4k условием $k^2 \leq \Lambda^2$, то эту поправку можно вычислить в явном виде. Вычисление приводит к результату

$$Z_1 = 1 + Z_1^{(1)}, \quad Z_1^{(1)} = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{9}{4} \right]. \quad (116,7a)$$

получим

$$\mathcal{M}(p) = (\hat{p} - m)^2 \frac{e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{m(1-x^2) - (\hat{p} + m)(1-x)^2 \left[1 - \frac{2x(1+x)z}{x^2 + (\lambda/m)^2} \right]}{m^2x + (m^2 - p^2)(1-x)z} \quad (116,8)$$

(в общем знаменателе опущен член с λ^2 , так как это не приведет здесь к расходимости; в другом месте $\lambda^2(1-x)$ заменено на λ^2 , так как инфракрасной расходимости будет отвечать расходимость при $x \rightarrow 0$).

Интегрирование в (116,8) (сначала по dz , затем по dx) довольно длинно, но элементарно и приводит к следующему окончательному результату:

$$\mathcal{M}(p) = \frac{\alpha}{2\pi m} (\hat{p} - m)^2 \left\{ \frac{1}{2(1-\rho)} \left(1 - \frac{2-3\rho}{1-\rho} \ln \rho \right) - \frac{\hat{p} + m}{m\rho} \left[\frac{1}{2(1-\rho)} \left(2 - \rho + \frac{\rho^2 + 4\rho - 4}{1-\rho} \ln \rho \right) + 1 + 2 \ln \frac{\lambda}{m} \right] \right\}, \quad (116,9)$$

где обозначено

$$\rho = \frac{m^2 - p^2}{m^2}$$

(*R. Karplus, N. M. Kroll, 1950*). Интеграл вычислен в предположении $\rho > 0$, причем $\rho \gg \lambda/m$. В соответствии с правилом обхода полюсов, при аналитическом продолжении выражения (116,9) в область $\rho < 0$ фаза логарифма определяется заменой $m \rightarrow m - i0$; при этом $\rho \rightarrow \rho - i0$, так что $\ln \rho$ при $\rho < 0$ надо понимать как

$$\ln \rho = \ln |\rho| - i\pi, \quad \rho < 0. \quad (116,10)$$

Рассмотрим поведение массового оператора при $p^2 \gg m^2$. Имеем тогда $-\rho \approx p^2/m^2 \gg 1$ и с логарифмической точностью

$$\mathcal{M}(p) = -[\mathcal{G}^{-1}(p) - G^{-1}(p)] \approx \frac{\alpha}{4\pi} \hat{p} \ln \frac{p^2}{m^2}. \quad (116,11)$$

Как и в случае фотонного пропагатора (ср. формулы (110,15—16) для поляризационного оператора), поправка к G^{-1} оказывается малой только при не слишком большой энергии, именно при

$$\frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{p^2}{m^2} \ll 1.$$

В данном случае, однако, логарифмический рост в известном смысле фиктивен, он может быть устранен надлежащим выбором калибровки, т. е. функции $\tilde{D}^{(l)}$ в фотонном пропагаторе (*Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, 1954*). Именно, для этого надо положить

$$D^{(l)} = 0, \quad (116,12)$$

между тем как формула (116,9) получена в калибровке

$$D^{(l)} = D. \quad (116,13)$$

Это свойство калибровки (116,12) делает ее особенно удобной для исследования характера теории при $p^2 \gg m^2$, что и будет использовано ниже в § 128.

Для доказательства сделанного утверждения замечаем, что если мы интересуемся только членами $\sim e^2$, то преобразование от калибровки (116,13) к калибровке (116,12) можно считать бесконечно малым (благодаря наличию e^2 в экспоненте (102,14)). Соответственно этому можно прямо воспользоваться формулой (102,16), положив в ней

$$\delta d^{(l)}(q) = -\frac{D}{q^2} = -\frac{4\pi}{(q^2)^2},$$

а также заменив, с требуемой точностью, функции \mathcal{G} в подынтегральном выражении на G . В интеграле по d^4q будет существенна область $q \gg p$; при этом $G(p-q)$ в подынтегральном выражении много меньше, чем $G(p)$, и им можно пренебречь. Тогда

$$\delta \mathcal{G}^{-1} = -G^{-2}(p) \delta \mathcal{G}(p) = -ie^2 G^{-1}(p) \int \delta d^{(l)}(q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

Наконец, применив преобразование (127,11—12), получим

$$\delta \mathcal{G}^{-1}(p) = -\frac{e^2}{4\pi} G^{-1}(p) \int \frac{d(-q^2)}{-q^2} \approx -\frac{e^2}{4\pi} \hat{p} \ln \frac{\Lambda^2}{p^2},$$

где Λ — вспомогательный верхний предел, расходимость на котором устраняется перенормировкой. Последняя состоит в вычитании того же выражения при $p^2 \approx m^2$, так что окончательно имеем

$$\delta \mathcal{G}^{-1} = \frac{e^2}{4\pi} \hat{p} \ln \frac{p^2}{m^2}.$$

Это выражение как раз сокращает разность $\mathcal{G}^{-1} - G^{-1}$ из (116,11).

Наконец, остановимся на вопросе о причинах, приводящих к необходимости введения конечной «массы фотона» λ при регуляризации интеграла (116,2), тесно связанной с его поведением при $p^2 \rightarrow m^2$.

Прежде всего отметим, что сам по себе этот интеграл с $\lambda = 0$ конечен при $p^2 = m^2$ (для устранения несущественной в данном аспекте расходимости на больших k полагаем при этом, что интеграл берется по большой, но конечной области k -пространства). Необходимость же введения λ возникает при вычитании перенормировочного интеграла, который без этого расходился бы при $p^2 = m^2$. Выясним поэтому, как вел бы себя при $p^2 \rightarrow m^2$

нерегуляризованный массовый оператор. Поскольку же это поведение существенно зависит от выбора калибровки, то рассмотрим общий случай произвольной калибровки (между тем как интеграл (116,2) написан уже при определенном выборе — (116,13)).

Воспользуемся снова преобразованием (102,16). Представив $\delta d^{(l)}$ в виде

$$\delta d^{(l)}(q) = \frac{\delta D^{(l)}}{q^2} = \frac{4\pi}{(q^2)^2} \delta a(q^2), \quad (116,14)$$

будем считать, что δa — вариация функции $a(q^2)$, существенно меняющейся лишь на интервалах $q^2 \sim m^2$ и конечной при $q^2 \approx m^2$. В подынтегральном выражении в правой стороне (102,16) в разности $\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p-q)$ при малых q оба члена близки и интеграл сходится. Заметив, что при малых q

$$\mathcal{G}(p-q) \sim \frac{1}{p^2 - m^2 - 2pq},$$

мы видим, что $\mathcal{G}(p-q)$ можно опустить по сравнению с $\mathcal{G}(p)$ при $q \gg (p^2 - m^2)/m$. Интеграл же

$$\delta \mathcal{G}(p) = ie^2 \mathcal{G}(p) \int \delta d^{(l)}(q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} = -\frac{e^2}{4\pi} \mathcal{G}(p) \int \delta a(q^2) \frac{d(-q^2)}{-q^2}$$

логарифмически расходится в области

$$\frac{(p^2 - m^2)^2}{m^2} \ll q^2 \ll m^2.$$

С логарифмической точностью имеем поэтому

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\mathcal{G}} = -\frac{e^2}{2\pi} \delta a(m^2) \ln \frac{m^2}{p^2 - m^2}.$$

Это равенство можно проинтегрировать. Заметив, что при $\alpha \equiv e^2 \rightarrow 0$ точный пропагатор \mathcal{G} должен совпадать с пропагатором свободных частиц G , получим

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{\hat{p} - m} \left(\frac{m^2}{p^2 - m^2} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (C - a_0)}, \quad (116,15)$$

где $a_0 = a(m^2)$, а C — некоторая постоянная. Для определения последней сравним выражение

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\hat{p} - m) \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} (C - a_0) \ln p \right], \quad (116,16)$$

получающееся из (116,15) в первом приближении по α , с аналогичным выражением, получающимся из интеграла (116,2)

при $\lambda = 0$ ¹⁾:

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\hat{p} - m) \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \ln p \right]. \quad (116,17)$$

Согласно определению (116,14) функция $a(q^2)$ совпадает с отношением $D^{(l)}/D$. Поэтому калибровка (116,13), к которой относится (116,17), отвечает $a = a_0 = 1$. Потребовав совпадения (116,16) и (116,17) при этом значении a_0 , получим $C = 3$.

Таким образом, окончательно находим следующее предельное выражение (*инфракрасную асимптотику*) неперенормированного электронного пропагатора при $p^2 \rightarrow m^2$:

$$\mathcal{G}(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} \left(\frac{m^2}{p^2 - m^2} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (3 - a_0)} \quad (116,18)$$

(А. А. Абрикосов, 1955) ²⁾.

Перенормированный пропагатор должен иметь при $p^2 = m^2$ простой полюс. Мы видим, что (116,18) удовлетворяет этому требованию только в калибровке, в которой

$$D^{(l)} = 3D \quad (116,19)$$

(так что $a_0 = 3$). В этом случае регуляризация интеграла Фейнмана (имеющая целью устранить его расходимость на верхних пределах) не будет требовать введения конечной «массы фотона». В других же калибровках нулевая масса фотона приводит к возникновению при $p^2 = m^2$ точки ветвления вместо простого полюса, и устранение этого «дефекта» требует введения конечного параметра λ .

§ 117. Испускание мягких фотонов с ненулевой массой

При вычислении электронных формфакторов в § 114 мы столкнулись с расходимостью интегралов на малых частотах виртуальных фотонов. Эта расходимость тесно связана с обсуждавшейся уже в § 95 инфракрасной катастрофой. Там было указано, что сечение любого процесса с участием заряженных

¹⁾ Чтобы получить (116,17), нет необходимости производить вычисления заново. Член $\sim \ln p$ в (116,9) как раз и получен в предположении $p \gg \lambda$, допускающем переход $\lambda \rightarrow 0$. Член же $\sim \ln(\lambda/m)$ возникает из-за вычитания перенормировочного интеграла и в исходном интеграле (116,2) отсутствует. Это вычитание не затрагивает, как легко видеть, членов $\sim \ln p$.

²⁾ Справедливость этой формулы связана лишь с неравенствами $\alpha \ll 1, |\ln p| \gg 1$, между тем как формулы теории возмущений требовали бы также и $\frac{\alpha}{2\pi} |\ln p| \ll 1$.

Отметим также, что знак разности $p^2 - m^2$ здесь несуществен, так как мнимая часть выражения (116,18) все равно находилась бы за пределами его точности.

частиц (в том числе рассеяния электрона внешним полем, изображаемого диаграммой вида (114,1)) не имеет смысла само по себе, а лишь при учете одновременного излучения любого числа мягких фотонов. Как будет подробно объяснено ниже (§ 119), в суммарном сечении, учитывающем излучение мягких квантов, все расходимости сокращаются. При этом, разумеется, для получения правильного результата предварительное «обрезание» расходящихся интегралов во всех складываемых сечениях должно производиться одинаковым образом.

В § 114 это обрезание было осуществлено путем введения фиктивной конечной массы виртуального фотона λ . Поэтому мы должны теперь видоизменить и полученные в § 95 формулы так, чтобы они описывали излучение мягких «фотонов» с ненулевой массой.

С формальной точки зрения такой фотон относится к «векторным» частицам со спином 1, свободное поле которых рассматривалось в § 14. Они описываются 4-вектором Ψ_μ , который в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\Psi_\mu = V\sqrt{4\pi} \sum_{k\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (c_{k\alpha} e_\mu^{(\alpha)} e^{-ikx} + c_{k\alpha}^+ e_\mu^{(\alpha)*} e^{ikx}), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (117,1)$$

(где мы изменили обозначения по сравнению с (14,14) с целью привести их в соответствие с фотонным случаем).

Взаимодействие «фотонов» (117,1) с электронами надо описывать лагранжианом того же вида, что и для истинных фотонов:

$$- e j^\mu \Psi_\mu \quad (117,2)$$

(с заменой потенциала A_μ на Ψ_μ). Тогда амплитуды процессов испускания фотонов конечной массы будут даваться обычными правилами диаграммной техники, с тем лишь отличием, что

$$k^2 = \lambda^2, \quad (117,3)$$

а суммирование по поляризациям испущенного фотона должно будет производиться по трем независимым поляризациям (двум поперечным и одной продольной) вместо двух у обычного фотона.

Матрицу плотности неполяризованной векторной частицы легко получить, используя условия

$$ke = 0, \quad ee^* = -1 \quad (117,4)$$

(ср. (14,12—13)). Записав искомую матрицу в виде

$$\rho = \overline{e_\nu e_\nu^*} = ag_{\mu\nu} + bk_\mu k_\nu$$

и определив a и b из условий (117,4), получим

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2} \right). \quad (117,5)$$

Таковую же структуру имеет числитель пропагатора векторных частиц:

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2 - \lambda^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2} \right).$$

Однако в силу калибровочной инвариантности амплитуды реальных процессов рассеяния не зависят от продольной части фотонного пропагатора, и это свойство не связано с конкретным видом его поперечной части. Поэтому второй член в скобках фактически выпадает, и остается выражение того же типа, что и для обычных фотонов:

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2 - \lambda^2} g_{\mu\nu}$$

(которым мы и пользовались в §§ 114, 116).

Обратимся теперь к излучению мягких (в объясненном в § 95 смысле) фотонов.

Произведенный в § 95 вывод формул (95,5—6) переносится на рассматриваемый случай с тем лишь изменением, что при раскрытии квадратов $(p \pm k)^2$ в знаменателях электронных пропагаторов прибавляется член $k^2 = \lambda^2$. В результате вместо (95,6) получим

$$d\sigma = d\sigma_{\text{уп}} \cdot e^2 \left| \frac{p'e}{p'k + \lambda^2/2} - \frac{pe}{pk - \lambda^2/2} \right|^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega},$$

где $d\sigma_{\text{уп}}$ — сечение того же процесса без излучения мягкого кванта (который называем условно «упругим» процессом)¹⁾. В дальнейшем при интегрированиях по d^3k будут существенны значения $|\mathbf{k}| \sim \lambda$. При этом $p'k \sim pk \gg \lambda^2$, так что членами λ^2 в знаменателях можно пренебречь. Суммирование по поляризациям фотона осуществляется с помощью (117,5) (усреднение с последующим умножением на 3). После сделанного пренебрежения второй член в (117,5) не дает вклада в сечение, и остается²⁾

$$d\sigma = - d\sigma_{\text{уп}} \cdot e^2 \left(\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right)^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega}. \quad (117,6)$$

¹⁾ В § 95 сечение $d\sigma_{\text{уп}}$ обозначалось как $d\sigma_0$.

²⁾ На первый взгляд могло бы возникнуть сомнение в допустимости пренебрежения λ^2 до усреднения ввиду наличия λ^2 в знаменателе второго члена в (117,5). Легко, однако, непосредственно убедиться в том, что этот член при усреднении дает вклад $\sim \lambda^4 \frac{1}{\lambda^2}$, которым можно пренебречь.

Таким образом, мы возвращаемся к формуле (95,7), в которой, однако, надо понимать теперь ω как

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}. \quad (117,7)$$

Формула (117,6) имеет совершенно общий характер. Она применима как при упругом, так и при неупругом рассеянии и даже при изменении сорта частиц (такой случай встретится нам в § 147). Результат же дальнейшего интегрирования по d^3k зависит от 4-векторов p и p' , иными словами, от характера основного процесса рассеяния.

Рассмотрим случай упругого рассеяния, когда

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|, \quad \varepsilon = \varepsilon',$$

и определим полную вероятность испускания фотонов с частотой, меньшей некоторого ω_{\max} — такого, что

$$\lambda \ll \omega_{\max} \ll m. \quad (117,8)$$

Вычислим прежде всего интеграл по d^3k в нерелятивистском пределе. При $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \ll m$ имеем

$$\left(\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right)^2 \approx \frac{(qk)^2}{m^2\omega^4} - \frac{q^2}{m^2\omega^2}$$

($q = p' - p$). Интегрирование этого выражения по направлениям \mathbf{k} дает

$$\frac{4\pi q^2}{m^2\omega^2} \left(\frac{k^2}{3\omega^2} - 1 \right).$$

После этого имеем из (117,6)

$$d\sigma = d\sigma_{\text{ун}} \cdot \frac{e^2 q^2}{\pi m^2} \int_0^{\omega_{\max}} \left[1 - \frac{k^2}{3(k^2 + \lambda^2)} \right] \frac{k^2 d|\mathbf{k}|}{(k^2 + \lambda^2)^{3/2}}$$

или, произведя интегрирование в предположении $\omega_{\max}/\lambda \gg 1$,

$$d\sigma = d\sigma_{\text{ун}} \cdot \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} - \frac{5}{6} \right), \quad q^2 \ll m^2. \quad (117,9)$$

В общем релятивистском случае для вычисления интеграла воспользуемся формулой (127,4). С ее помощью имеем для интеграла по углам

$$I = \int \frac{d\omega_k}{(pk)(p'k)} = \int_0^1 dx \int \frac{d\omega_k}{[(pk)x + (p'k)(1-x)]^2}$$

или, раскрыв скалярные произведения с $p = (\varepsilon, \mathbf{p})$, $p' = (\varepsilon, \mathbf{p}')$,

$$I = \int_0^1 dx \int \frac{d\omega_k}{\{\varepsilon\omega - \mathbf{k}[\mathbf{p}x + \mathbf{p}'(1-x)]\}^2}.$$

Теперь внутренний интеграл легко вычисляется в сферических координатах с полярной осью вдоль вектора $\mathbf{p}x + \mathbf{p}'(1-x)$, после чего

$$I = \int_0^1 \frac{4\pi dx}{(\varepsilon\omega)^2 - [\mathbf{p}x + \mathbf{p}'(1-x)]^2 k^2} = \int_0^1 \frac{4\pi dx}{[m^2 + q^2x(1-x)]k^2 + \varepsilon^2\lambda^2}.$$

Два других интеграла (с $(pk)^2$ и $(p'k)^2$ в знаменателях) получаются отсюда при $q = 0$. Заметив также, что

$$pp' = \varepsilon^2 - \mathbf{p}\mathbf{p}' = m^2 + \frac{1}{2}q^2,$$

получим

$$d\sigma = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{\omega_{\max}} \frac{k^2 d|\mathbf{k}|}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \left\{ \frac{m^2 + 1/2q^2}{[m^2 + q^2x(1-x)]k^2 + \varepsilon^2\lambda^2} - \frac{m^2}{m^2k^2 + \varepsilon^2\lambda^2} \right\}. \quad (117,10)$$

Интегрирование по $d|\mathbf{k}|$ сводится к вычислению интегралов вида

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{k^2 d|\mathbf{k}|}{(ak^2 + \lambda^2)\sqrt{k^2 + \lambda^2}} &= \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{d|\mathbf{k}|}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} - \frac{\lambda^2}{a} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{d|\mathbf{k}|}{(ak^2 + \lambda^2)\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \approx \\ &\approx \frac{1}{a} \ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} - \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(az^2 + 1)\sqrt{z^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Во втором интеграле подставлено $|\mathbf{k}| \rightarrow \lambda z$ и верхний предел (ω_{\max}/λ) заменен на ∞ , что допустимо ввиду сходимости интеграла.

Возникающие затем интегралы по dx в (117,10) не могут быть полностью выражены через элементарные функции. Результат представим в виде

$$d\sigma = \alpha \left[K \left(\frac{|q|}{2m} \right) \ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} + K_1 \right] d\sigma_{\text{ун}}, \quad (117,11)$$

где ¹⁾

$$K(\xi) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2\xi^2 + 1}{\xi \sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right], \quad (117,12)$$

$$K_1 = \frac{2e}{\pi |p|} \ln \frac{\varepsilon + |p|}{m} - \frac{2m^2 + q^2}{\pi e^2} \int_0^1 \frac{dx}{a \sqrt{1-a}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-a}}{\sqrt{a}}, \quad (117,13)$$

$$a = \frac{1}{e^2} [m^2 + q^2 x (1-x)].$$

Найдем асимптотическое выражение для сечения в ультра-релятивистском случае. При этом предполагается, что не только $\varepsilon \gg m$, но и $|q| \gg m$, т. е. угол рассеяния не слишком мал. В этих условиях в интеграле (117,13) существенна область значений x , в которой $a \ll 1$; после соответствующих пренебрежений

$$K_1 \approx \frac{q^2}{2\pi e^2} \int_0^1 \frac{\ln a}{a} dx \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\ln \frac{q^2}{e^2} + \ln x + \ln(1-x)}{x(1-x)} dx.$$

Интеграл надо обрезать при $a \sim 1$, т. е. при $x \sim m^2/q^2$ снизу и при $1-x \sim m^2/q^2$ сверху. Тогда

$$K_1 \approx \frac{1}{2\pi} \left[2 \ln \frac{q^2}{e^2} \ln \frac{q^2}{m^2} - \ln^2 \frac{q^2}{m^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\ln^2 \frac{q^2}{m^2} - 4 \ln \frac{\varepsilon}{m} \ln \frac{q^2}{m^2} \right].$$

Эта формула справедлива с точностью до квадратов логарифмов, как говорят, с *дважды логарифмической* точностью. С этой же точностью достаточно положить в первом члене в (117,11)

$$K(\xi) \approx \frac{4}{\pi} \ln \xi \quad (\xi \gg 1).$$

Окончательно

$$d\sigma = \frac{2\alpha}{\pi} \left[\ln \frac{q^2}{m^2} \ln \frac{\omega_{\max}}{\lambda} - \ln \frac{\varepsilon}{m} \ln \frac{q^2}{m^2} + \frac{1}{4} \ln^2 \frac{q^2}{m^2} \right] d\sigma_{\text{уп}}, \quad q^2 \gg m^2. \quad (117,14)$$

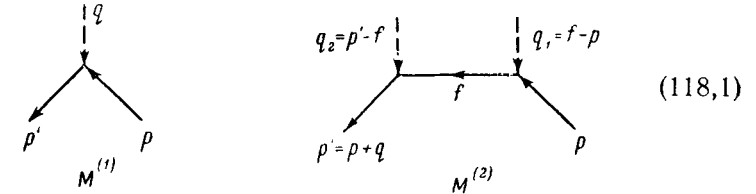
¹⁾ Функция $K(\xi)$ уже встречалась нам в задачах к § 95. Это неудивительно, так как с логарифмической точностью (117,11) можно получить, интегрируя сечение испускания фотонов нулевой массы (95,8) по $d\omega$ в пределах от λ до ω_{\max} .

Если ввести вместо ξ переменную θ согласно $\xi = \text{sh} \frac{\theta}{2}$, то

$$K(\theta) = \frac{2}{\pi} (\theta \text{cth} \theta - 1). \quad (117,12a)$$

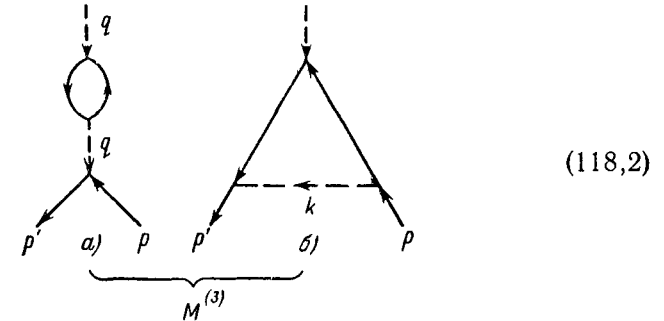
§ 118. Рассеяние электрона во внешнем поле во втором борновском приближении

В первых двух приближениях по внешнему полю рассеяние электрона изображается диаграммами



Первой из них отвечает амплитуда $M^{(1)} \sim Ze^2$, рассмотренная в § 81. Амплитуда же второго приближения $M^{(2)} \sim (Ze^2)^2$.

Легко видеть, что члены такого же порядка величины возникают и от радиационных поправок. В третьем порядке теории возмущений радиационные поправки к амплитуде рассеяния изображаются диаграммами



При этом $M^{(3)} \sim Ze^2 \cdot e^2$, и если $Z \sim 1$, то $M^{(3)} \sim M^{(2)}$. Согласно (65,26) сечение рассеяния

$$d\sigma = |M_{fi}^{(1)} + M_{fi}^{(2)} + M_{fi}^{(3)}|^2 \frac{d\sigma'}{16\pi^2}. \quad (118,3)$$

В стоящем здесь квадрате амплитуды мы имеем право сохранить, наряду с $|M_{fi}^{(1)}|^2$, также и интерференционные члены между $M_{fi}^{(1)}$ и $M_{fi}^{(2)}$ и между $M_{fi}^{(1)}$ и $M_{fi}^{(3)}$. Таким образом, с точностью до членов $\sim e^6$ сечение представится суммой

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)} + d\sigma_{\text{рад}}, \quad (118,4)$$

где $d\sigma^{(1)}$ — сечение в первом борновском приближении (§ 81), а поправки к нему

$$d\sigma^{(2)} = 2 \operatorname{Re} M_{fi}^{(1)} M_{fi}^{(2)*} \frac{d\omega'}{16\pi^2},$$

$$d\sigma_{\text{рад}} = 2 \operatorname{Re} M_{fi}^{(1)} M_{fi}^{(3)*} \frac{d\omega'}{16\pi^2}. \quad (118,5)$$

Напомним (§ 81), что

$$M_{fi}^{(1)} = |e| |(\bar{u}' \gamma^0 u) \Phi(\mathbf{q})|, \quad (118,6)$$

где $\Phi(\mathbf{q})$ — компонента Фурье скалярного потенциала постоянного внешнего поля ($\Phi \equiv A_0^{(e)}$) и учтено, что заряд электрона $e = -|e|$.

Два выражения (118,5) могут, очевидно, вычисляться независимо. Первое будет рассмотрено в этом, а второе — в следующем параграфе.

Амплитуда второго приближения, построенная по диаграмме (118,1), дается интегралом¹⁾

$$M_{fi}^{(2)} = -e^2 \int \left\{ \bar{u}(p') \gamma^0 \frac{\hat{f} + m}{f^2 - m^2 + i0} \gamma^0 u(p) \right\} \Phi(p' - f) \Phi(f - p) \frac{d^3 f}{(2\pi)^3}. \quad (118,7)$$

«4-импульсы» внешнего постоянного поля $q_1 = f - p$ и $q_2 = p' - f$ не имеют временных компонент. Поэтому

$$f_0 = \varepsilon = \varepsilon', \quad (118,8)$$

где ε и ε' — начальная и конечная энергии электрона, совпадающие друг с другом при упругом рассеянии.

В чисто кулоновском поле неподвижного заряда $Z|e|$:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \frac{4\pi Z |e|}{q^2}.$$

Для такого потенциала интеграл (118,7) логарифмически расходится (при $f \approx p$ и $f \approx p'$). Эта расходимость специфична для кулонова поля и связана с медленностью его убывания на больших расстояниях. Ее происхождение легче всего уяснить на при-

¹⁾ Сформулированное в § 78 правило 8 диаграммной техники нуждается в некотором уточнении для случая постоянного (во времени) внешнего поля. Именно, входящей линии внешнего поля ставится в соответствие трехмерная компонента Фурье 4-потенциала

$$A^{(e)}(\mathbf{q}) = \int A^{(e)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3x.$$

Законы сохранения в вершине должны писаться с учетом того, что $q^\mu = (0, \mathbf{q})$, а по тем \mathbf{q} , которые остаются неопределенными, должно производиться интегрирование по $d^3q/(2\pi)^3$. Вычисленная по этим правилам амплитуда M_{fi} определяет сечение рассеяния согласно (65, 25).

мере нерелятивистского случая. Согласно III (133,8) коэффициент при сферической волне $e^{i|\mathbf{p}'|r}/r$ в асимптотическом выражении волновой функции электрона в кулоновом поле имеет вид

$$f(\theta) \exp\left(-i \frac{Zam}{|\mathbf{p}|} \ln |\mathbf{p}| r\right).$$

Но этот коэффициент и является амплитудой рассеяния электрона в поле, и мы видим, что ее фаза содержит расходящийся (при $r \rightarrow \infty$) член. При разложении амплитуды рассеяния по степеням $Z\alpha$ этот член приведет к расходимости всех членов разложения, начиная со второго (так как сама функция $f(\theta)$ пропорциональна $Z\alpha$). Ситуация в релятивистском случае имеет, разумеется, аналогичный характер.

Эти рассуждения показывают в то же время, что расходящиеся члены должны сократиться при вычислении сечения рассеяния, в котором фаза амплитуды не существенна. Простейший путь корректного проведения вычислений состоит в том, чтобы рассмотреть сначала рассеяние в экранированном кулоновом поле, т. е. положить

$$\Phi(\mathbf{q}) = \frac{4\pi Z |e|}{q^2 + \delta^2} \quad (118,9)$$

с малой константой экранирования δ ($\delta \ll |\mathbf{p}|$). Тем самым устраняется расходимость в амплитуде рассеяния, а в окончательном ответе для сечения можно уже будет положить $\delta = 0$.

Подставив (118,9) в (118,7), получим

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi} Z^2 \alpha^2 \bar{u}(p') [(\gamma^0 \varepsilon + m) J_1 + \mathbf{J}] u(p),$$

где введены обозначения:

$$J_1 = \int \frac{d^3 f}{[(p' - f)^2 + \delta^2][(f - p)^2 + \delta^2][p^2 - f^2 + i0]},$$

$$J = \int \frac{f d^3 f}{[(p' - f)^2 + \delta^2][(f - p)^2 + \delta^2][p^2 - f^2 + i0]} \equiv \frac{p + p'}{2} J_2. \quad (118,10)$$

Здесь $p^2 = \varepsilon^2 - m^2 = p'^2$ и интеграл J симметричен по отношению к \mathbf{p} и \mathbf{p}' ; из соображений векторной симметрии заранее очевидно, что вектор \mathbf{J} должен быть направлен вдоль $\mathbf{p} + \mathbf{p}'$. Исключив теперь матрицы γ с помощью равенств

$$\gamma \mathbf{p} u = (\gamma^0 \varepsilon - m) u,$$

$$\bar{u}' \gamma \mathbf{p}' = \bar{u}' (\gamma^0 \varepsilon - m),$$

получим

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi} Z^2 \alpha^2 \bar{u}(p') [\gamma^0 \varepsilon (J_1 + J_2) + m (J_1 - J_2)] u(p). \quad (118,11)$$

Для проведения дальнейших вычислений перейдем (как и в § 81) от биспинорных амплитуд u и u' к соответствующим им (согласно (23,9) и (23,11)) трехмерным спинорам w и w' . Прямым перемножением находим

$$\bar{u}'u = w'^* \{(\epsilon + m) - (\epsilon - m) \cos \theta + i\nu\sigma(\epsilon - m) \sin \theta\} w,$$

$$\bar{u}'\gamma^0 u = w'^* \{(\epsilon + m) + (\epsilon - m) \cos \theta - i\nu\sigma(\epsilon - m) \sin \theta\} w,$$

где

$$\mathbf{v} = \frac{[\mathbf{nn}']}{\sin \theta}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}'|}, \quad \cos \theta = \mathbf{nn}'.$$

После этого амплитуда (118,11) представится в виде¹⁾

$$M_{fi}^{(2)} = 4\pi w'^* (A^{(2)} + B^{(2)} \nu \sigma) w,$$

$$A^{(2)} = -\frac{1}{2\pi^2} Z^2 \alpha^2 \{[(\epsilon + m) + (\epsilon - m) \cos \theta] \epsilon (J_1 + J_2) + [(\epsilon + m) - (\epsilon - m) \cos \theta] m (J_1 - J_2)\}, \quad (118,12)$$

$$B^{(2)} = \frac{i}{2\pi^2} Z^2 \alpha^2 (\epsilon - m) \sin \theta [\epsilon (J_1 + J_2) - m (J_1 - J_2)].$$

Амплитуда же рассеяния первого приближения в аналогичных обозначениях имеет вид

$$M_{fi}^{(1)} = 4\pi w'^* (A^{(1)} + B^{(1)} \nu \sigma) w,$$

$$A^{(1)} = \frac{Z\alpha}{q^2} [(\epsilon + m) + (\epsilon - m) \cos \theta], \quad (118,13)$$

$$B^{(1)} = -i \frac{Z\alpha}{q^2} (\epsilon - m) \sin \theta,$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$.

Сечение рассеяния и поляризационные эффекты выражаются через величины $A = A^{(1)} + A^{(2)}$ и $B = B^{(1)} + B^{(2)}$ формулами, полученными в III, § 138. Так, сечение рассеяния неполяризованных электронов:

$$d\sigma = (|A|^2 + |B|^2) d\sigma' \approx d\sigma^{(1)} + 2(A^{(1)} \operatorname{Re} A^{(2)} - iB^{(1)} \operatorname{Im} B^{(2)}) d\sigma'.$$

После подстановки (118,12—13) простое вычисление дает

$$d\sigma^{(2)} = -d\sigma' \frac{Z^3 \alpha^3 \epsilon^3}{\pi^2 p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[\left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \operatorname{Re} (J_1 + J_2) + \frac{m^2}{\epsilon^2} \operatorname{Re} (J_1 - J_2) \right], \quad (118,14)$$

где $\mathbf{v} = |\mathbf{p}|/\epsilon$ — скорость электрона, θ — угол рассеяния. В результате рассеяния электроны поляризуются, вектор поляризации

¹⁾ Определение величин A и B здесь соответствует определению в § 37 и в III, § 138 и отличается множителем от определения в § 81.

конечных электронов

$$\zeta' = \frac{2 \operatorname{Re} (AB^*)}{|A|^2 + |B|^2} \mathbf{v} \approx \frac{2(A^{(1)} \operatorname{Re} B^{(2)} - iB^{(1)} \operatorname{Im} A^{(2)})}{|A^{(1)}|^2 + |B^{(1)}|^2} \mathbf{v}$$

или, после подстановки (118,12—13),

$$\zeta' = \frac{4Z\alpha m p^4}{\pi^2 \epsilon^2} \frac{\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \operatorname{Im} (J_1 - J_2) \mathbf{v}. \quad (118,15)$$

Перейдем к вычислению интегралов J_1 и J_2 . Оно облегчается применением метода параметризации по формуле (127,2). Интеграл J_1 принимает вид

$$J_1 = -2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int \frac{d^3 f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \cdot \delta(1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3)}{[(\mathbf{p}' - \mathbf{f})^2 + \delta^2] \xi_1 + [(\mathbf{p} - \mathbf{f})^2 + \delta^2] \xi_2 + [f^2 - p^2 - i0] \xi_3}.$$

Интегрирование по $d\xi_3$ устраняет δ -функцию; приводя члены в знаменателе, получим

$$J_1 = -2 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \int \frac{d^3 f d\xi_1 d\xi_2}{\{\delta^2 (\xi_1 + \xi_2) + p^2 (2\xi_1 + 2\xi_2 - 1) - 2f(\xi_1 \mathbf{p}' + \xi_2 \mathbf{p}) + f^2 - i0\}^3}.$$

Введя вместо f новую переменную $\mathbf{k} = \mathbf{f} - \xi_1 \mathbf{p}' - \xi_2 \mathbf{p}$, сведем интегрирование по $d^3 f$ к интегралу вида

$$\int \frac{d^3 k}{(k^2 - a^2 - i0)^3} = i \frac{\pi^2}{4a^3},$$

так что

$$J_1 = -\frac{i\pi^2}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\{p^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1 - 2\xi_2 + 1) + 2\xi_1 \xi_2 p p' - \delta^2 (\xi_1 + \xi_2) - i0\}^{3/2}}.$$

Вместо ξ_1 и ξ_2 вводим симметричные комбинации: $x = \xi_1 + \xi_2$, $y = \xi_1 - \xi_2$. Интегрирование по dy (в пределах от 0 до x) элементарно и дает

$$J_1 = -\frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}|^3} \int_0^1 \frac{x dx}{\left[b x^2 - 2x + 1 - \frac{\delta^2}{p^2} x - i0 \right] \left[(1-x)^2 - \frac{\delta^2}{p^2} x - i0 \right]^{1/2}},$$

где

$$b = \frac{p^2 + p p'}{2p^2} = \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Для вычисления интеграла по dx при $\delta \rightarrow 0$ разбиваем область интегрирования на две части:

$$\int_0^1 \dots dx = \int_0^{1-\delta_1} \dots dx + \int_{1-\delta_1}^1 \dots dx, \quad 1 \gg \delta_1 \gg \frac{\delta}{|\mathbf{p}|}.$$

В первом интеграле можно положить $\delta = 0$; тогда ¹⁾

$$\int_0^{1-\delta_1} \dots dx = \frac{1}{2(1-b)} \ln \frac{(1-x)^2}{(bx^2 - 2x + 1 - i0)} \Big|_0^{1-\delta_1} = \frac{1}{2(1-b)} \left[\ln \frac{\delta_1^2}{1-b} + i\pi \right].$$

Во втором же интеграле можно положить $x = 1$ везде, кроме члена $(1-x)^2$, а также положить $\delta = 0$ в первой скобке в знаменателе. Тогда ²⁾

$$\begin{aligned} \int_{1-\delta_1}^1 \dots dx &= -\frac{1}{1-b} \int_0^{\delta_1} \frac{dx'}{(x'^2 - \frac{\delta^2}{p^2} - i0)^{1/2}} = \\ &= -\frac{1}{1-b} \left[\int_{\delta/|p|}^{\delta_1} \frac{dx'}{(x'^2 - \frac{\delta^2}{p^2})^{1/2}} + i \int_0^{\delta/|p|} \frac{dx'}{(\frac{\delta^2}{p^2} - x'^2)^{1/2}} \right] = \\ &= -\frac{1}{1-b} \left[\ln \frac{2|p|\delta_1}{\delta} + i \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

При сложении обоих интегралов величина δ_1 , как и следовало, выпадает, и получается

$$J_1 = \frac{i\pi^2}{2|p|^3 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \ln \left(\frac{2|p|}{\delta} \sin \frac{\theta}{2} \right). \quad (118,16)$$

Интеграл J_2 вычисляется аналогичным образом и равен

$$J_2 = J_1 - \frac{\pi^3 \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right)}{4|p|^3 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{i\pi^2}{2|p|^3 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \ln \sin \frac{\theta}{2}. \quad (118,17)$$

Остается подставить эти выражения в (118,14—15), и мы получим окончательные результаты ³⁾:

$$d\sigma^{(2)} = \frac{\pi(Z\alpha)^3 e}{4|p|^3 \sin^3 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right) d\sigma', \quad (118,18)$$

$$\xi' = \frac{2Z\alpha m|p|}{e^2} \frac{\sin^3 \frac{\theta}{2} \ln \sin \frac{\theta}{2}}{\left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2}} \mathbf{v}. \quad (118,19)$$

¹⁾ Правило обхода (член $i0$) позволяет определить изменение аргумента выражения под знаком логарифма при переходе от 0 к $1 - \delta_1$: при обходе точки ветвления снизу аргумент меняется от 0 до $-\pi$.

²⁾ И здесь правило обхода определяет знак корня при переходе от положительных к отрицательным значениям подкоренного выражения.

³⁾ Правильные результаты были впервые получены Мак-Кинли и Фешбахом (W. A. McKinley, N. Feshbach, 1948) исходя из точных выражений парциальных фаз рассеяния. Вычисление по теории возмущений проведено Далитцем (R. H. Dalitz, 1950).

В первом борновском приближении сечения рассеяния электрона и позитрона (в одном и том же внешнем поле) одинаковы. Во втором приближении эта симметрия исчезает. Для рассеяния позитрона (заряд $+|e|$) амплитуда первого приближения (118,6) имеет обратный знак, знак же $M_{fi}^{(2)}$ не меняется. Поэтому сечение $d\sigma^{(2)}$, представляющее собой интерференционный член между $M_{fi}^{(1)}$ и $M_{fi}^{(2)}$, изменит знак. То же самое произойдет и с выражением (118,19) для вектора поляризации. Вообще, переход от формул для рассеяния электрона к формулам для рассеяния позитрона можно произвести формальной заменой $Z \rightarrow -Z$.

§ 119. Радиационные поправки к рассеянию электрона во внешнем поле

Перейдем к вычислению радиационных поправок к рассеянию электрона во внешнем поле (*J. Schwinger*, 1949).

Соответствующая часть амплитуды рассеяния изображается двумя диаграммами (118,2). Первая из них дает в амплитуду вклад

$$-(\bar{u}' \gamma^0 u) \frac{\mathcal{P}(-q^2)}{4\pi} D(-q^2) \cdot e\Phi(q),$$

где $\mathcal{P}(-q^2)$ — поляризационный оператор, отвечающий петле в диаграмме. Вклад второй диаграммы

$$-(\bar{u}' \Lambda^0 u) e\Phi(q),$$

где Λ^0 — поправочный член в вершинном операторе ($\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Lambda^\mu$); согласно (113,6)

$$\Lambda^0 = \gamma^0 [f(-q^2) - 1] - \frac{1}{2m} \sigma^{0\nu} q_\nu g(-q^2).$$

Сложив оба вклада, получим ¹⁾

$$M_{fi}^{(3)} = -(\bar{u}' \gamma^0 Q_{\text{рад}} u) e\Phi(q),$$

$$Q_{\text{рад}}(q) = f(-q^2) - 1 - \frac{1}{q^2} \mathcal{P}(-q^2) + \frac{1}{2m} g(-q^2) q\nu. \quad (119,1)$$

Обсудим прежде всего вопрос об инфракрасной расходимости, содержащейся в формфакторе $f(-q^2)$, а тем самым и в амплитуде рассеяния (119,1).

Уже было указано (§ 95), что точная амплитуда чисто упругого рассеяния сама по себе равна нулю, т. е. не имеет смысла. Физическим смыслом обладает лишь амплитуда рассеяния, определенной как процесс, в котором может быть испущено

¹⁾ При преобразовании помнить, что если $q^\mu = (0, \mathbf{q})$, то $q_\mu = (0, -\mathbf{q})!$ Поэтому $\sigma^{0\nu} q_\nu = -\gamma^0 q\nu$.

любое число мягких фотонов с энергией каждого меньшей некоторого заданного значения ω_{\max} , причем

$$\omega_{\max} \ll m.$$

Другими словами, имеет смысл лишь сумма

$$d\sigma = d\sigma_{\text{уп}} + d\sigma_{\text{уп}} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_{\omega} + d\sigma_{\text{уп}} \frac{1}{2!} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_{\omega_1} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_{\omega_2} + \dots, \quad (119,2)$$

где $d\sigma_{\text{уп}}$ — сечение рассеяния без испускания фотонов, а $d\omega_{\omega}$ — дифференциальная вероятность испускания электроном фотона с частотой ω . При этом предполагается, что $d\sigma_{\text{уп}}$ само вычисляется в виде ряда теории возмущений, т. е. в виде разложения по степеням α ¹⁾. Тогда после сведения вместе членов каждого порядка по α из всех слагаемых в (119,2) мы получим $d\sigma$ в виде разложения по α , каждый из членов которого будет конечным.

В первом борновском приближении $d\sigma_{\text{уп}} \sim \alpha^2$. Этот член, естественно, имеет смысл сам по себе. Если же мы хотим учесть следующую поправку в $d\sigma_{\text{уп}}$ (член $\sim \alpha^3$), то наряду с ней надо взять также и второй член в сумме (119,2): поскольку $d\omega_{\omega} \sim \alpha$, то при умножении на $d\sigma_{\text{уп}} \sim \alpha^2$ отсюда тоже возникает величина $\sim \alpha^3$. Покажем, что при сложении этих двух величин инфракрасная расходимость устраняется.

Расходящийся член в факторе f согласно (114,17) имеет вид²⁾

$$-\frac{\alpha}{2} K \left(\frac{|q|}{2m} \right) \ln \frac{m}{\lambda}.$$

Соответствующий член в амплитуде (119,1):

$$\frac{\alpha}{2} K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot (\bar{u}' \gamma^0 u) e\Phi(q),$$

а в сечении рассеяния (118,5):

$$d\sigma^{\text{инфра}} = -\alpha K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot |\bar{u}' \gamma^0 u|^2 |e\Phi(q)|^2 \frac{d\sigma'}{16\pi^2}.$$

Сравним это с борновским сечением

$$d\sigma^{(1)} = |\bar{u}' \gamma^0 u|^2 |e\Phi(q)|^2 \frac{d\sigma'}{16\pi^2},$$

¹⁾ Что касается вероятности $d\omega_{\omega}$, то необходимость учета радиационных поправок в ней зависит от величины ω_{\max} ; предел $\omega \rightarrow 0$ отвечает классическому случаю, в котором радиационные поправки исчезают; поэтому выбор достаточно малого ω_{\max} можно всегда сделать их малыми.

²⁾ В этом легко убедиться, используя связь

$$\frac{|q|}{m} = \frac{1-\xi}{\sqrt{\xi}}$$

между $|q|$ и переменной ξ , через которую выражено (114,17).

находим, что

$$d\sigma^{\text{инфра}} = -\alpha K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot d\sigma^{(1)}. \quad (119,3)$$

С другой стороны, второй член в (119,2) с $\int d\omega_{\omega}$ из (117,11) дает

$$d\sigma_{\text{уп}} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_{\omega} = \alpha K \ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} \cdot d\sigma^{(1)}. \quad (119,4)$$

Наконец, сложив (119,3) и (119,4), получим

$$-d\sigma^{(1)} \cdot \alpha K \left(\frac{|q|}{2m} \right) \ln \frac{m}{2\omega_{\max}}. \quad (119,5)$$

Мы видим, что расходящийся вклад от мягких ($|k| \sim \lambda$) виртуальных фотонов действительно сокращается с вкладом от излучения таких же реальных фотонов. Такая же ситуация имеет место в любом другом процессе рассеяния.

В то же время появляется зависимость сечения рассеяния от ω_{\max} . Эта зависимость — следствие того, что величина ω_{\max} входит в самое определение рассеяния как процесса, в котором может быть испущено любое число мягких фотонов. Естественно, что сечение такого процесса будет тем меньше, чем ниже предел ω_{\max} частот фотонов, испускание которых мы еще относим к данному процессу рассеяния.

Найдем теперь полное выражение радиационной поправки к сечению рассеяния. Поступая по стандартным правилам (см. (66,7)), находим для сечения, усредненного по поляризациям начального и просуммированного по поляризациям конечного электронов:

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma_{\text{рад}} = |e\Phi(q)|^2 \text{Sp} \{ (\not{p}' + m) (\gamma^0 + \gamma^0 Q_{\text{рад}}) (\not{p} + m) (\gamma^0 + \gamma^0 \bar{Q}_{\text{рад}}) \} \frac{d\sigma'}{32\pi^2}. \quad (119,6)$$

Согласно (119,1)

$$Q_{\text{рад}} = a + b \not{v} q, \quad \bar{Q}_{\text{рад}} = \gamma^0 Q_{\text{рад}}^+ \gamma^0 = a - b \not{v} q, \\ a = f(-q^2) - 1 - \frac{1}{q^2} \mathcal{P}(-q^2), \quad b = \frac{1}{2m} g(-q^2).$$

С точностью до членов, линейных по a и b , след в (119,6) равен

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \{ \dots \} = 2 \left(\epsilon^2 - \frac{q^2}{4} \right) (1 + 2a) - 2bm q^2.$$

Поэтому

$$d\sigma_{\text{рад}} = 2 \left\{ f_{\lambda}(-q^2) - 1 - \frac{1}{q^2} \mathcal{P}(-q^2) - \frac{g^2}{4\epsilon^2 - q^2} g(-q^2) \right\} d\sigma^{(1)}, \quad (119,7)$$

где $d\sigma^{(1)}$ — борновское сечение рассеяния неполяризованных электронов (81,5); у формфактора f приписан индекс λ для напоминания о том, что он «обрезан по массе фотона λ ».

Остается прибавить к (119,7) сечение испускания мягких фотонов. Если представить f_λ в виде

$$f_\lambda(-q^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} K \left(\frac{|q|}{2m} \right) \ln \frac{m}{\lambda} + \alpha K_2, \quad (119,8)$$

то согласно (117,11) это добавление сведется к замене в (119,7) f_λ на

$$f_{\omega_{\max}} = 1 - \frac{\alpha}{2} K \left(\frac{|q|}{2m} \right) \ln \frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{\alpha}{2} K_1 + \alpha K_2. \quad (119,9)$$

С этой заменой (119,7) дает окончательный ответ.

Отметим, что в нерелятивистском пределе¹⁾

$$f_{\omega_{\max}} = 1 - \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{11}{24} \right), \quad q^2 \ll m^2. \quad (119,10)$$

Обратим внимание на то, что специфика внешнего поля входит в радиационную поправку к сечению только через посредство $d\sigma^{(1)}$; множитель же в фигурных скобках в (119,7) имеет универсальный характер. В нерелятивистском приближении

$$d\sigma_{\text{рад}} = -d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{19}{30} \right), \quad q^2 \ll m^2 \quad (119,11)$$

(здесь входят вклады от всех членов в (119,7)). В обратном же, ультрарелятивистском случае основной вклад вносит только член с $f_{\omega_{\max}} - 1$ и получается

$$d\sigma_{\text{рад}} = -d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{q^2}{m^2} \ln \frac{\epsilon}{\omega_{\max}}, \quad q^2 \gg m^2. \quad (119,12)$$

Отметим в заключение, что рассмотренные здесь радиационные поправки не приводят к появлению каких-либо поляризованных эффектов, отсутствующих в первом борновском приближении (в отличие от поправок второго борновского приближения, рассмотренных в § 118). Дело в том, что специфика первого борновского приближения в конечном счете связана с эрмитовостью S -матрицы. Это свойство, однако, сохраняется и при учете рассмотренных радиационных поправок, поскольку в этом приближении отсутствуют какие-либо реальные промежуточные состояния в канале рассеяния (так что правая часть соотношения унитарности обращается в нуль)²⁾.

¹⁾ Это выражение отличается от нерелятивистского (114,20) заменой $\ln \lambda \rightarrow \ln 2\omega_{\max} - 5/6$.

²⁾ Вычисление радиационных поправок к процессам, появляющимся лишь во втором приближении теории возмущений, значительно более громоздко и в этой книге не будет воспроизведено. Мы ограничимся лишь некоторым ли-

§ 120. Радиационное смещение атомных уровней

Радиационные поправки приводят к смещению уровней энергии связанных состояний электрона во внешнем поле (так называемое *смещение Лэмба*). Наиболее интересный случай этого рода — смещение уровней атома водорода (или водородоподобного иона)¹⁾.

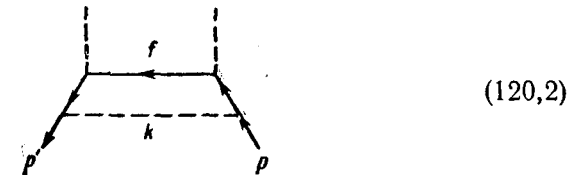
Последовательный метод вычисления поправок к уровням энергии основан на использовании точного электронного пропагатора во внешнем поле (§ 106). Но если

$$Z\alpha \ll 1, \quad (120,1)$$

то удобнее воспользоваться более простым способом, в котором внешнее поле рассматривается как возмущение.

В первом приближении по внешнему полю радиационная поправка во взаимодействии электрона с постоянным электрическим полем описывается теми двумя диаграммами (118,2), которые уже рассматривались нами в связи с задачей о рассеянии электрона в таком поле; переход от одной задачи к другой требует лишь простой переформулировки (см. ниже).

Легко понять, однако, что таким способом можно найти только ту часть сдвига уровня, которая обусловлена взаимодействием с виртуальными фотонами достаточно больших частот. Действительно, рассмотрим, например, следующую (по внешнему полю) радиационную поправку к амплитуде рассеяния электрона:



тературными ссылками: радиационные поправки к рассеянию фотона на электроном — L. M. Brown, R. Feynman, Phys. Rev. 85, 231 (1952); к двухфотонной аннигиляции пары — J. Haggis, L. M. Brown, Phys. Rev. 105, 1656 (1957); к рассеянию электрона электроном и позитроном — M. Redhead, Proc. Roy. Soc. A220, 219 (1953); P. В. Половин, ЖЭТФ 31, 449 (1956); к тормозному излучению — П. И. Фомин, ЖЭТФ 35, 707 (1958).

¹⁾ Вычисление сдвига водородных уровней было впервые произведено Бете (H. A. Bethe, 1947) с логарифмической точностью на основе нерелятивистского рассмотрения; этот расчет послужил отправным толчком для всего последующего развития квантовой электродинамики. Разность уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ (в первом неисчезающем приближении теории возмущений) была точно вычислена Кроллем и Лэмбом (N. M. Kroll, W. E. Lamb, 1949), а полная формула для сдвига уровней была найдена Вейскопфом и Френчем (V. Weisskopf, J. V. French, 1949).

(в отличие от (118,26) эта диаграмма содержит две вершины внешнего поля). В той области интегрирования по d^4k , где k_0 достаточно велико, эта поправка содержит лишнюю степень $Z\alpha$ и поэтому несущественна. Но введение в диаграмму второй вершины внешнего поля вводит в нее также и еще один электронный пропагатор $G(f)$. При малых k (и нерелятивистских внешних концах p и p') оказываются существенными импульсы виртуальных электронов f , близкие к полюсу пропагатора $G(f)$. Появляющийся таким образом малый знаменатель компенсирует лишний малый множитель $Z\alpha$. То же самое относится, очевидно, и к поправкам всех вообще порядков по внешнему полю. Другими словами, в области малых частот виртуальных фотонов внешнее поле должно учитываться точным образом.

Разобьем искомый сдвиг уровня $\delta E_s^{(1)}$ на две части:

$$\delta E_s = \delta E_s^{(I)} + \delta E_s^{(II)}, \quad (120,3)$$

происходящие соответственно от взаимодействия с виртуальными фотонами с частотами в областях I) $k_0 > \kappa$, II) $k_0 < \kappa$. При этом выберем κ так, чтобы было

$$(Z\alpha)^2 m \ll \kappa \ll m \quad (120,4)$$

($Z^2\alpha^2 m$ — порядок величины энергии связи электрона в атоме). Тогда в области I будет достаточно учитывать поле ядра лишь в первом приближении. В области же II надо учитывать поле ядра точным образом, но зато (в силу условия $\kappa \ll m$) можно решать задачу в нерелятивистском приближении — не только по отношению к самому электрону, но и для всех промежуточных состояний. При условии (120,4) области применимости обоих способов расчета перекрываются, что и позволяет произвести строгую «сшивку» обеих частей поправки к уровню.

Высокочастотная часть сдвига

Рассмотрим сначала область I. В ней можно воспользоваться поправкой к амплитуде рассеяния (119,1), из которой, однако, необходимо предварительно исключить вклад виртуальных фотонов, относящихся к области II. Эти фотоны вносят лишь малый вклад в формфактор g , который поэтому не нуждается в изменении. В функцию же f виртуальные фотоны малых частот вносят большой вклад из-за инфракрасной расходимости. Поэтому в качестве f в (119,1) надо подставить функцию f_κ из которой область $k_0 < \kappa$ уже исключена.

¹⁾ В этом параграфе E_s обозначает энергию электрона в атоме, не включающую в себя его энергию покоя. Индекс s обозначает совокупность квантовых чисел, определяющих состояние атома.

Такое исключение можно было бы произвести прямым способом, вычитая из f интеграл по области $k_0 < \kappa$. Требуемый результат можно, однако, получить без новых вычислений, используя результаты § 119.

Для этого заметим, что исключение частот $k_0 < \kappa$ можно рассматривать как один из возможных способов инфракрасного обрезания. Результат же для поправки к сечению рассеяния не может, разумеется, зависеть от способа обрезания при условии, что таким же образом обрезается и вероятность испускания реальных мягких фотонов, т. е. в понятие «упругого» рассеяния включается испускание фотонов с частотами лишь от κ до заданного ω_{\max} . Если выбрать $\omega_{\max} = \kappa$, то явный учет испускания фотонов станет излишним. Отсюда ясно, что f_κ получается из определенной в § 119 функции $f_{\omega_{\max}}$ просто заменой ω_{\max} на κ . В частности, в нерелятивистском случае

$$f_\kappa - 1 = -\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\kappa} + \frac{11}{24} \right). \quad (120,5)$$

Преобразуем теперь поправку (119,1) к амплитуде рассеяния, представив ее как результат соответствующей поправки к эффективной потенциальной энергии электрона в поле. Сравним амплитуду (119,1)

$$-e(u'^* Q_{\text{рад}} \Phi u)$$

с борновской амплитудой рассеяния (118,6)

$$-e(u'^* \Phi u),$$

мы видим, что роль такой поправки играет (в импульсном представлении) функция

$$e\delta\Phi(q) = eQ_{\text{рад}}(q)\Phi(q). \quad (120,6)$$

В нерелятивистском случае, взяв \mathcal{P} и g из (110,14) и (114,20), а для f подставив f_κ из (120,5) получим

$$\delta\Phi(q) = \left\{ -\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\kappa} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) + \frac{\alpha}{4\pi m} q\gamma \right\} \Phi(q). \quad (120,7)$$

Соответствующая функция $\delta\Phi(r)$ в координатном представлении¹⁾:

$$\delta\Phi(r) = \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\kappa} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) \Delta\Phi(r) - i \frac{\alpha}{4\pi m} \gamma \nabla \Phi(r). \quad (120,8)$$

¹⁾ Подчеркнем отличие этой поправки к потенциалу от поправки, рассматривавшейся в § 111. Последняя включала в себя только эффект поляризации вакуума (диаграмма (118,2,а)) на кулоновское поле как таковое. Поправка же (120,8) относится уже ко взаимодействию поля с электроном и включает в себя также и эффект изменения движения электрона (диаграмма (118,2,б)).

Смещение уровня $\delta E_s^{(1)}$ получим, усредняя $e\delta\Phi(\mathbf{r})$ по волновой функции невозмущенного состояния электрона в атоме, т. е. как соответствующий диагональный матричный элемент¹⁾:

$$\delta E_s^{(1)} = \frac{ea}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\kappa} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) \langle s | \Delta\Phi | s \rangle - i \frac{ea}{4\pi m} \langle s | \nabla\Phi | s \rangle. \quad (120,9)$$

В первом члене достаточно использовать при усреднении нерелятивистскую функцию электрона. Во втором же члене такого приближения недостаточно: нулевое приближение по нерелятивистским функциям обращается в нуль ввиду отсутствия у матриц ∇ диагональных элементов. Поэтому здесь надо воспользоваться найденной в § 33 приближенной релятивистской функцией $\psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}$, сохранив в ней малые (в стандартном представлении) компоненты χ . Имеем

$$\psi^* \nabla \psi = \varphi^* \sigma \chi - \chi^* \sigma \varphi$$

и, подставив из (33,4)

$$\chi = \frac{1}{2m} \sigma p \varphi = -\frac{i}{2m} \sigma \nabla \varphi,$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle s | \nabla\Phi | s \rangle &= -\frac{i}{2m} \int \{ \varphi^* (\sigma \nabla \Phi) (\sigma \nabla \varphi) + (\nabla \varphi^* \cdot \sigma) (\sigma \nabla \Phi) \varphi \} d^3x = \\ &= \frac{i}{2m} \int \{ \varphi^* \Delta\Phi \cdot \varphi - 2i\sigma \varphi^* [\nabla\Phi \cdot \nabla\varphi] \} d^3x \end{aligned}$$

(при преобразовании интеграла использовано тождество (33,5) и произведено интегрирование по частям). Поскольку $\Phi = \Phi(r)$, то

$$\nabla\Phi = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\Phi}{dr},$$

и поэтому

$$-i\sigma [\nabla\Phi \cdot \nabla] = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \sigma l,$$

где $l = -i[\mathbf{r}\nabla]$ — оператор орбитального момента. Наконец, собрав полученные выражения и подставив в (120,9), получим

$$\delta E_s^{(1)} = \frac{e^3}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\kappa} + \frac{19}{30} \right) \langle s | \nabla\Phi | s \rangle + \frac{e^3}{4\pi m^2} \langle s | \sigma l \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} | s \rangle, \quad (120,10)$$

где теперь уже в обоих членах усреднение производится по нерелятивистской волновой функции.

¹⁾ Строго говоря, определенные в § 114 формфакторы относились к вершинному оператору при двух свободных электронных концах ($p^2 = p'^2 = m^2$). Для электрона же в атоме энергия E_s — уровень, вообще никак не связанный с p . Этим отличием можно, однако, пренебречь в области I.

Низкочастотная часть сдвига

Для вычисления второй части сдвига уровней используем прием, основанный в конечном итоге на условии унитарности.

В силу возможности испускания фотона возбужденное состояние атома является квазистационарным (а не строго стационарным). Такому состоянию можно приписать комплексное значение энергии, причем его мнимая часть равна $-\omega/2$, где ω — вероятность распада состояния, т. е. в данном случае полная вероятность испускания фотона (см. III, § 132). В нерелятивистском приближении излучение является дипольным, и согласно (45,7) имеем

$$\text{Im } \delta E_s = -\frac{1}{2} \omega_s = -\frac{2}{3} \sum_{s'} |d_{ss'}|^2 (E_s - E_{s'})^3$$

(где суммирование производится по всем нижележащим уровням, $E_{s'} < E_s$), или в эквивалентном виде:

$$\text{Im } \delta E_s = -\frac{2}{3} \int_0^\infty d\omega \cdot \sum_{s'} |d_{ss'}|^2 (E_s - E_{s'})^3 \delta(E_s - E_{s'} - \omega). \quad (120,11)$$

Чтобы найти теперь вещественную часть δE_s , следует рассматривать E_s как комплексную переменную и произвести аналитическое продолжение. Это можно сделать, рассматривая δ -функции как происходящие от полюсов. Правило обхода полюсов задается, как обычно, добавлением отрицательной мнимой части к массам виртуальных частиц, в данном случае — к массам $m_{s'}$ электрона в промежуточных состояниях атома. Роль этих масс играют $m_{s'} = m + E_{s'}$, так что надо положить

$$E_{s'} \rightarrow E_{s'} - i0,$$

откуда следует замена

$$\delta(E_s - E_{s'} - \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{E_s - E_{s'} - \omega + i0} \quad (120,12)$$

(ср. (108,3)).

Подставив (120,12) в (120,11), найдем, таким образом,

$$\text{Im } \delta E_s = \text{Im} \frac{2}{3\pi} \int_0^\infty d\omega \cdot \sum_{s'} |d_{ss'}|^2 \frac{(E_s - E_{s'})^3}{E_s - E_{s'} - \omega + i0}.$$

Искомое аналитическое продолжение получится теперь просто опусканием знака Im. Нам надо, однако, выделить из δE_s лишь ту часть, которая связана с вкладом от частот в области II: $\omega < \kappa$. Для этого достаточно заменить верхний предел интеграла

на κ . Произведя интегрирование, получим в результате

$$\delta E_s^{(11)} = \frac{2}{3\pi} \sum_{s'} |d_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{\kappa}{E_{s'} - E_s + i0} \quad (120,13)$$

(в силу неравенства (120,4) на верхнем пределе мы пренебрегли разностью $E_s - E_{s'}$ по сравнению с κ). В дальнейшем нас будет интересовать только вещественная часть уровня; она получается заменой в (120,13) аргумента логарифма на $\kappa/|E_{s'} - E_s|$.

В выражении (120,13) преобразуем член с $\ln \kappa$, заменив матричные элементы дипольного момента $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ матричными элементами импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и его производной $\dot{\mathbf{p}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{s'} |d_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 &= -\frac{e^2}{m^2} \sum_{s'} |p_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s) = \\ &= \frac{ie^2}{2m^2} \sum_{s'} \{(\dot{\mathbf{p}})_{ss'} p_{s's} - p_{ss'} (\dot{\mathbf{p}})_{s's}\}. \end{aligned}$$

Заменив теперь $\dot{\mathbf{p}}$ согласно операторному уравнению движения электрона $\dot{\mathbf{p}} = -e \nabla \Phi$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{s'} |d_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 &= -\frac{ie^3}{2m^2} \sum_{s'} \{(\nabla \Phi)_{ss'} p_{s's} - p_{ss'} (\nabla \Phi)_{s's}\} = \\ &= \frac{ie^3}{2m^2} \langle s | \mathbf{p} \nabla \Phi - \nabla \Phi \mathbf{p} | s \rangle = \frac{e^3}{2m^2} \langle s | \Delta \Phi | s \rangle. \end{aligned} \quad (120,14)$$

Поэтому можно переписать (120,13) в виде

$$\delta E_s^{(11)} = \frac{e^3}{3\pi m^2} \langle s | \Delta \Phi | s \rangle \ln \frac{2\kappa}{m} + \frac{2e^2}{3\pi} \sum_{s'} |r_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{m}{2|E_s - E_{s'}|}. \quad (120,15)$$

Полный сдвиг

Наконец, сложив обе части, найдем следующую окончательную формулу для сдвига уровня:

$$\begin{aligned} \delta E_s &= \frac{2e^2}{3\pi} \sum_{s'} |r_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{m}{2|E_s - E_{s'}|} + \\ &+ \frac{e^3}{3\pi m^2} \frac{19}{30} \langle s | \Delta \Phi | s \rangle + \frac{e^3}{4\pi m^2} \left\langle s \left| \sigma \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right| s \right\rangle \end{aligned} \quad (120,16)$$

(как и следовало, вспомогательная величина κ из нее выпала)¹⁾.

¹⁾ Определение поправок следующего порядка в сдвиге уровней требует очень сложных вычислений. Наиболее полную сводку и систематический вывод таких поправок (вместе с соответствующей библиографией) можно найти в статьях: G. W. Erickson, D. R. Yennie, Ann. of Physics 35, 271, 447 (1965).

Все матричные элементы в (120,16) берутся по отношению к нерелятивистским волновым функциям электрона в атоме. Для атома водорода (или водородоподобного иона) эти функции зависят только от трех квантовых чисел: главного квантового числа n , орбитального момента l и его проекции m (но не от полного момента j); соответствующие же уровни энергии зависят только от n . Введем обозначение¹⁾

$$L_{nl} = \frac{n^3}{2m(Ze^2)^4} \sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm' | \mathbf{r} | nlm \rangle|^2 (E_{n'} - E_n)^3 \ln \frac{m(Ze^2)^2}{2|E_{n'} - E_n|}. \quad (120,17)$$

Уровни энергии пропорциональны $(Ze^2)^2$, а характерный размер атома пропорционален Ze^2 ; поэтому определенные согласно (120,17) величины L_{nl} от Z не зависят²⁾. Эти величины могут быть вычислены численно.

Далее рассмотрим отдельно случаи $l = 0$ и $l \neq 0$. В случае $l = 0$ последний член в (120,16) исчезает. Во втором члене воспользуемся уравнением

$$e \Delta \Phi = 4\pi Ze^2 \delta(\mathbf{r}),$$

которому удовлетворяет потенциал кулоновского поля ядра. Отсюда

$$\langle nlm | \Delta \Phi | nlm \rangle = 4\pi Ze^2 |\psi_{nlm}(0)|^2 = \begin{cases} 4m^3 (Ze^2)^4 n^{-3}, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0 \end{cases}$$

(см. (34,3)). В первом же члене вводим обозначение (120,17) и еще раз используем равенство (120,14):

$$\sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm' | \mathbf{r} | n00 \rangle|^2 (E_{n'} - E_n)^3 = \frac{e}{2m^2} \langle n00 | \Delta \Phi | n00 \rangle = \frac{2m(Ze^2)^4}{n^3}.$$

В результате получить следующее выражение для сдвига s -термов:

$$\delta E_{n0} = \frac{4mc^2 Z^4 \alpha^5}{3\pi n^3} \left[\ln \frac{1}{(Z\alpha)^2} + L_{n0} + \frac{19}{30} \right] \quad (120,18)$$

(обычные единицы). Численные значения нескольких величин L_{n0}

$n =$	1	2	3	4	∞
$L_{n0} =$	-2,984	-2,812	-2,768	-2,750	-2,721

¹⁾ Матричные элементы от \mathbf{r} диагональны по числу j ; поэтому суммирование по s в (120,16) сводится к суммированию по n, l, m .

²⁾ В силу изотропии пространства сумма (120,17) не зависит, конечно, и от квантового числа m .

Невозмущенные уровни $E_n = -mc^2(Z\alpha)^2/2n^2$; поэтому относительная величина радиационного сдвига

$$\left| \frac{\delta E_{n0}}{E_{n0}} \right| \sim Z^2 \alpha^3 \ln \frac{1}{Z\alpha}. \quad (120,19)$$

В случае $l \neq 0$ в (120,16) исчезает второй член. Третий же вычисляется с помощью формул, приведенных в § 34; с этим членом появляется зависимость сдвига уровней также и от числа j . В результате получим

$$\delta E_{nl} = \frac{4mc^2 Z^4 \alpha^5}{3\pi n^3} \left[L_{nl} + \frac{3}{8} \frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1)(2l+1)} \right], \quad l \neq 0. \quad (120,20)$$

Таким образом, радиационный сдвиг снимает последнее вырождение, оставшееся после учета спин-орбитального взаимодействия, — вырождение уровней с одинаковыми значениями n и j , но разными $l = j \pm 1/2$. Так, численное значение $L_{21} = +0,030$ и из (120,18—20) получается следующая величина для разности уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода:

$$E_{20_{1/2}} - E_{21_{1/2}} = 0,41 mc^2 \alpha^5$$

(этой разности отвечает частота 1050 Мгц).

§ 121. Радиационное смещение уровней мезоатомов

В конце § 115 была выяснена существенная роль, которую играет эффект поляризации электронного вакуума в радиационной поправке (второго приближения) к магнитному моменту мюона. В еще большей степени аналогичная ситуация имеет место (уже в первом приближении) для радиационного сдвига уровней μ -мезоводорода — водородоподобной системы из протона и μ -мезона (А. Д. Галайин, И. Я. Померанчук, 1952).

В произведенном в предыдущем параграфе расчете сдвига уровней обычного атома был учтен, в частности, эффект поляризации электронного вакуума (электронная петля в диаграмме (118,2,а)). Если, аналогичным образом, для мезоатома учитывать эффект поляризации мюонного вакуума, то весь расчет полностью переносится и на этот случай, с заменой лишь везде массы электрона $m = m_e$ на массу мюона m_μ . Поскольку, однако, относительная величина сдвига уровней оказывалась не зависящей от массы электрона (см. (120,19)), то и для мезоводорода получился бы тот же самый результат.

Легко видеть, однако, что значительно больший вклад в сдвиг уровней мезоатома внесет эффект поляризации электронного вакуума. Действительно, замена мюонной петли в диаграмме на электронную означает замену мюонного поляризационного оператора электронным. Но поляризационный опера-

тор $\mathcal{P}(q^2)$ обратно пропорционален квадрату массы частицы (при нерелятивистских значениях q^2). Ясно поэтому, что указанная замена приведет к увеличению эффекта в $(m_\mu/m_e)^2$ раз. Именно этим вкладом и определится порядок величины сдвига уровней, который будет

$$\frac{\delta E}{|E|} \sim \alpha^3 \left(\frac{m_\mu}{m_e} \right)^2,$$

т. е. на четыре порядка больше, чем у обычного водорода¹⁾. Более наглядно происхождение этого эффекта можно понять, вспомнив, что искажение кулоновского потенциала поляризованной электронного вакуума простирается на расстояния $\sim 1/m_e$ (§ 111). В обычном атоме водорода электрон находится на расстояниях от ядра порядка величины $1/m_e \alpha$, т. е. вне основной области искажения поля; в мезоводороде же мюон находится на расстояниях $\sim 1/m_\mu \alpha$, как раз попадающих в эту область.

Для точного вычисления сдвига уровней мезоатома нельзя, однако, пользоваться приближенным нерелятивистским выражением поляризационного оператора, как это было сделано в формуле (120,7), использованной при вычислении сдвига уровней обычного атома. Дело в том, что характерные импульсы мюона в атоме мезоводорода $|p_\mu| \sim \alpha m_\mu$. Для мюона такие импульсы являются нерелятивистскими, но по отношению к электрону — уже релятивистскими.

Мы должны, следовательно, воспользоваться полным релятивистским выражением (111,5) для эффективного потенциала поля ядра, искаженного поляризацией электронного вакуума. Сдвиг уровня определится путем усреднения по волновой функции мюона в атоме:

$$\delta E_{nl} = -|e| \int |\psi_{nl}|^2 \delta\Phi(r) d^3x = -|e| \int_0^\infty R_{nl}^2(r) \delta\Phi(r) r^2 dr, \quad (121,1)$$

где R_{nl} — радиальная часть кулоновской (нерелятивистской) волновой функции. Для водородоподобного иона с зарядом ядра $Z|e|$ функции $R_{nl}(r)$ зависят от r лишь в безразмерной комбинации $\rho = Z\alpha m_\mu r$ (расстояние, измеренное в кулоновских единицах). Учитывая это и подставив $\delta\Phi(r)$ из (111,5) (с зарядом $Z|e|$ вместо e_1), приведем интеграл (121,1) к виду

$$\delta E_{nl} = -\frac{2}{3\pi} Z\alpha^3 m_\mu Q_{nl} \left(\frac{m_e}{Z\alpha m_\mu} \right), \quad (121,2)$$

где

$$Q_{nl}(x) = \int_0^\infty \rho d\rho \int_1^\infty R_{nl}^2(\rho) e^{-2x\rho\zeta} \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2} \right) \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2} d\zeta.$$

¹⁾ По аналогичной причине вклад поляризации мюонного вакуума в сдвиг уровней обычного атома водорода будет, напротив, пренебрежимо малым.

Так, для нескольких первых уровней мезоводорода численное вычисление дает следующие замечания относительно сдвига:

$$\frac{\delta E_{10}}{|E_{10}|} = -6,4 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\delta E_{20}}{|E_{20}|} = -2,8 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\delta E_{21}}{|E_{21}|} = -2,0 \cdot 10^{-5}.$$

§ 122. Релятивистское уравнение для связанных состояний

Метод, примененный в предыдущих параграфах к вычислению радиационного сдвига атомных уравнений, неприменим для решения такой задачи, как определение поправок к уровням позитрония — системы из двух равноправных частиц, ни одна из которых не может рассматриваться по отношению к другой как источник внешнего поля.

Систематический метод решения этой задачи основан на том, что уровни энергии связанных состояний являются полюсами точной амплитуды взаимного рассеяния этих двух частиц (как функции их суммарной энергии в системе центра инерции). Действительно, позитроний в каждом из своих дискретных состояний можно рассматривать как «промежуточную частицу» определенной массы, через образование которой может идти процесс рассеяния электрона и позитрона; каждому же «одночастичному» промежуточному состоянию отвечает полюс амплитуды рассеяния (разумеется, эти полюсы лежат в нефизической области 4-импульсов рассеивающихся частиц).

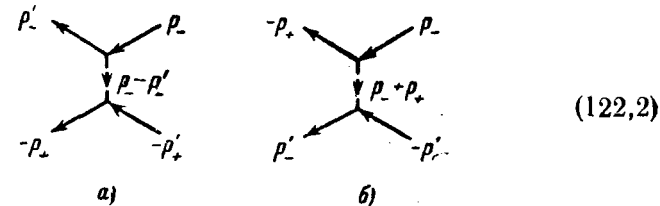
Согласно (103,17) точная амплитуда рассеяния строится из точной «четырёххвостой» вершинной части $\Gamma_{ik,lm}$ и поляризационных амплитуд u частиц. Последние, очевидно, не имеют отношения к полюсным особенностям, и поэтому удобнее не рассматривать их вовсе, говоря вместо этого о полюсах самой вершинной части, т. е. функции

$$\Gamma_{ik,lm}(p'_-, -p_+; p_-, -p'_+), \quad (122,1)$$

где обозначения 4-импульсов внешних концов диаграммы (103,12) отвечают рассеянию позитрона на электроне.

Подчеркнем, что утверждение о наличии полюсов относится именно к точной амплитуде рассеяния или к точной вершинной части; в каждом же отдельном члене ряда теории возмущений полюс отсутствует. Последнее очевидно уже из того, что в фейнмановских диаграммах каждого приближения фигурируют лишь электронные (и фотонные) линии, но не линии «составной частицы» — позитрония как целого. Отсюда в свою очередь следует, что вычисление амплитуды рассеяния вблизи ее полюсов требует суммирования бесконечной последовательности диаграмм. Выясним, какие именно диаграммы входят в эту последовательность.

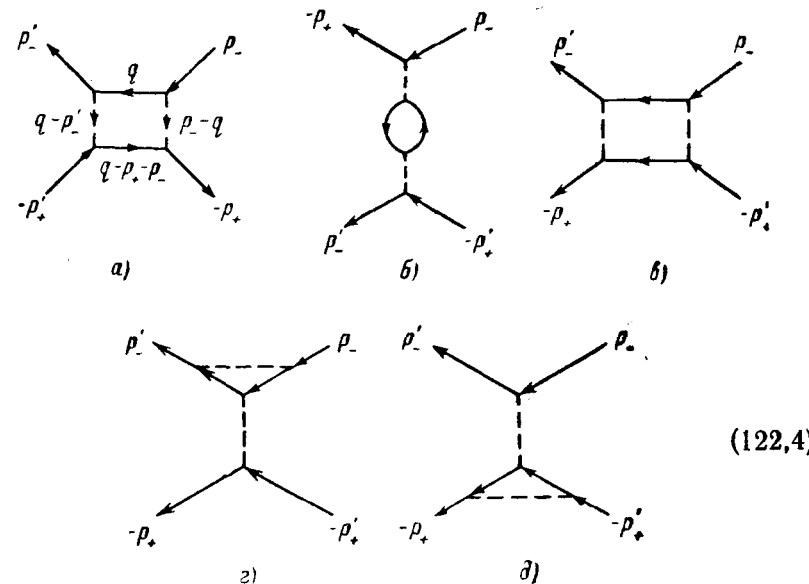
В первом неисчезающем (первом по α) приближении теории возмущений вершинной части (122,1) отвечают две диаграммы второго порядка:



или в аналитическом виде:

$$\Gamma_{ik,lm} = -e^2 \gamma_{il}^\mu \gamma_{km}^\nu D_{\mu\nu}(p_- - p'_-) + e^2 \gamma_{im}^\mu \gamma_{kl}^\nu D_{\mu\nu}(p_- + p_+). \quad (122,3)$$

В следующем (втором по α) приближении имеется уже 10 диаграмм четвертого порядка:



и еще 5 диаграмм, отличающихся перестановкой $p_- \leftrightarrow -p'_+$. Все эти диаграммы имеют по сравнению с диаграммами (122,2) лишнюю степень $e^2 = \alpha$. Покажем, однако, что в диаграмме а) эта лишняя степень малости компенсируется малым (при малых импульсах электрона и позитрона) знаменателем.

Будем рассматривать все величины в системе «центра инерции». Поскольку, однако, 4-импульсы внешних концов диаграмм

не предполагаются физическими (т. е. $p^2 \neq m^2$), то хотя в этой системе $p_+ = -p_-$, но $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$. Таким образом, 4-импульсы концов

$$\begin{aligned} p_- &= (\varepsilon_-, \mathbf{p}), & p_+ &= (\varepsilon_+, -\mathbf{p}), \\ p'_- &= (\varepsilon'_-, \mathbf{p}'), & p'_+ &= (\varepsilon'_+, -\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (122,5)$$

$$\varepsilon_- + \varepsilon_+ = \varepsilon'_- + \varepsilon'_+.$$

Энергия связи электрона и позитрона в позитронии $\sim m\alpha^2$. Поэтому в интересующей нас окрестности полюсов амплитуды рассеяния

$$\begin{aligned} |p| &\sim |p'| \sim m\alpha \ll m, \\ |\varepsilon_- - m| &\sim |\varepsilon_+ - m| \sim \frac{p^2}{m} \sim m\alpha^2, \dots \end{aligned} \quad (122,6)$$

Вклад в вершинную часть от диаграммы (122,4,а)

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik,lm}^{(4a)} &= -ie^4 \int (\gamma^\lambda G(q) \gamma^\mu)_{il} (\gamma^\nu G(q - p_- - p_+) \gamma^0)_{km} \times \\ &\quad \times D_{\lambda\rho}(q - p'_-) D_{\mu\nu}(p_- - q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (122,7)$$

В интеграле (122,7) существенна область значений $q^\mu = (q_0, \mathbf{q})$, близких к полюсам одновременно обеих функций G . В этой области $|\mathbf{q}|$ и $|q_0 - m|$ малы и электронные пропагаторы

$$\begin{aligned} G(q) &= \frac{\gamma^0 q_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{q} + m}{(q_0 + m)(q_0 - m) - q^2 + i0} \approx \frac{\gamma^0 + 1}{2} \frac{1}{q_0 - m - \frac{q^2}{2m} + i0}, \\ G(q - p_- - p_+) &\approx \frac{\gamma^0 - 1}{2} \frac{1}{q_0 - \varepsilon_- - \varepsilon_+ + m + \frac{q^2}{2m} - i0}. \end{aligned} \quad (122,8)$$

Полюсы знаменателей этих двух выражений лежат по разные стороны от вещественной оси в плоскости комплексной переменной q_0 ; замкнув путь интегрирования вдоль этой оси, скажем в верхней полуплоскости, вычислим интеграл по dq_0 по вычету относительно соответствующего полюса¹⁾. В результате найдем, что

$$\Gamma^{(4a)} \sim e^4 \int \frac{d^3q}{(q - p'_-)^2 (p_- - q)^2 \left(2m - \varepsilon_- - \varepsilon_+ + \frac{q^2}{m}\right)},$$

¹⁾ Для диаграммы же (122,4,в), отличающейся от (122,4,а) лишь взаимным направлением электронных линий, оба полюса оказались бы лежащими по одну сторону от вещественной оси, так что после сделанных пренебрежений интеграл вообще обратился бы в нуль.

и отсюда, с учетом (122,6), оценку

$$\Gamma^{(4a)} \sim \alpha^2 \frac{(m\alpha)^3}{(m\alpha)^4 m\alpha^2} = \frac{1}{m^2\alpha}.$$

Такой же порядок величины имеет и вклад в Γ от диаграммы второго порядка (122,2,а) (первый член в (122,3)), чем и доказываемое выше утверждение. Аналогичная ситуация имеет место и во всех дальнейших приближениях теории возмущений.

Таким образом, вычисление интересующей нас вершинной части вблизи ее полюсов требует суммирования бесконечной последовательности «аномально больших» диаграмм с промежуточными состояниями типа внутренних линий диаграммы (122,4,а). Для этих диаграмм характерно, что они могут быть рассечены между концами p_- , $-p_+$ и p'_- , $-p'_+$ на части, соединяющиеся друг с другом лишь двумя электронными линиями¹⁾. Совокупность же всех диаграмм, не удовлетворяющих этому условию, назовем «компактной» вершинной частью и обозначим посредством $\tilde{\Gamma}_{ik,lm}$; поскольку аномально большие диаграммы в нее не входят, эти величины можно вычислять по обычной теории возмущений. Так, в первом приближении $\tilde{\Gamma}$ определяется обеими диаграммами второго порядка (122,2), а в четвертом — восемью диаграммами 4-го порядка (все диаграммы, за исключением (122,4,а—б)).

Классифицируя некомпактные вершинные части по числу содержащихся в них «двойных связей», можно представить полную Γ в виде бесконечного ряда:

$$\tilde{\Gamma} = \text{diagram with one double line} + \text{diagram with two double lines} + \text{diagram with three double lines} + \dots \quad (122,9)$$

где все внутренние сплошные жирные линии — точные пропагаторы \mathcal{S} (ряд такого вида часто называют лестничным). Чтобы просуммировать этот ряд, «умножим» его слева еще на одну $\tilde{\Gamma}$ ²⁾:

$$\tilde{\Gamma} \tilde{\Gamma} = \text{diagram with one double line and one internal line} + \text{diagram with two double lines and one internal line} + \dots$$

¹⁾ Такое определение включает в себя все аномально большие диаграммы, но наряду с ними также и некоторые «нормальные», например диаграмму (122,4,б).

²⁾ То есть умножаем все члены ряда на $\tilde{\Gamma}$ и две \mathcal{S} и производим соответствующее интегрирование по 4-импульсам новых внутренних связей.

Сравнив теперь этот ряд с исходным рядом (122,9), мы видим, что

$$(122,10)$$

Это графическое равенство эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$i\Gamma_{ik,lm}(p'_-, -p_+; p_-, -p'_+) = i\Gamma_{ik,lm}(p'_-, -p_+; p_-, -p'_+) + \int \tilde{\Gamma}_{ir,sm}(p'_-, q - p'_+ - p'_-; q, -p'_+) \mathcal{G}_{st}(q) \mathcal{G}_{nr}(q - p'_+ - p'_-) \times \times \Gamma_{ik,ln}(q, -p_+; p_-, q - p'_+ - p'_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (122,11)$$

Функции $\tilde{\Gamma}$ и \mathcal{G} вычисляются по теории возмущений, после чего уравнение (122,11) дает, в принципе, возможность вычислить Γ с любой требуемой точностью.

Для определения же уровней энергии достаточно знать лишь положение полюсов функции Γ . Вблизи полюсов $\Gamma \gg \tilde{\Gamma}$, так что первым членом правой стороны (122,11) (вторая диаграмма справа в (122,10)) можно пренебречь, и уравнение становится однородным относительно Γ . В этом уравнении переменные p_+ , p_- , а также и индексы k, l становятся параметрами, зависимость от которых остается произвольной (не определяется самим уравнением)¹⁾. Опустив эти параметры (а вместе с ними и штрихи у остающихся переменных p'_+ , p'_-), получим уравнение

$$i\Gamma_{i,m}(p_-; -p_+) = \int \tilde{\Gamma}_{ir,sm}(p_-, q - p_+ - p_-; q, -p_+) \mathcal{G}_{st}(q) \times \times \mathcal{G}_{nr}(q - p_+ - p_-) \Gamma_{i,n}(q; q - p_+ - p_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \quad (122,12)$$

(E. E. Salpeter, H. A. Bethe, 1951).

Записанное в системе центра инерции ($p_+ + p_- = 0$), уравнение (122,12) имеет решения лишь при определенных значениях $\epsilon_+ + \epsilon_-$, которые и дают уровни энергии позитрония. Функция $\Gamma_{i,m}$ играет при этом лишь вспомогательную роль. Вместо нее практически удобнее ввести другую функцию:

$$\chi_{sr}(p_1, p_2) = \mathcal{G}_{st}(p_1) \Gamma_{i,n}(p_1; p_2) \mathcal{G}_{nr}(p_2). \quad (122,13)$$

¹⁾ Ср. аналогичную ситуацию в конце § 106, где при переходе к однородному интегральному уравнению (106,23) выпадала зависимость от переменной r' .

Тогда уравнение (122,12) примет вид

$$i[\mathcal{G}^{-1}(p_-) \chi(p_-, -p_+) \mathcal{G}^{-1}(-p_+)]_{im} = = \int \tilde{\Gamma}_{ir,sm}(p_-, q - p_+ - p_-; q, -p_+) \chi_{sr}(q, q - p_+ - p_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \quad (122,14)$$

в котором $\tilde{\Gamma}$ выступает как ядро интегрального оператора. Как уже упоминалось, $\tilde{\Gamma}$ может вычисляться по теории возмущений; то же самое относится, конечно, и к функции \mathcal{G}^{-1} .

Покажем, что в первом (по α) приближении теории возмущений (122,14) сводится, как и следовало ожидать, к нерелятивистскому уравнению Шредингера для позитрония.

В первом нерелятивистском приближении $\tilde{\Gamma}$ определяется одной лишь диаграммой (122,2,а) (диаграмма аннигиляционного типа (122,2,б) обращается в этом приближении в нуль)¹⁾. Как и по аналогичному поводу в § 83, фотонный пропагатор удобно выбрать в кулоновской калибровке (77,12—13), причем достаточно оставить в нем лишь компоненту D_{00} . Тогда

$$\tilde{\Gamma}_{ir,sm}(p_-, q - p_+ - p_-; q, -p_+) = -e^2 \gamma_{is}^0 \gamma_{rm}^0 D_{00}(q - p_-) = = -U(q - p_-) \gamma_{is}^0 \gamma_{rm}^0,$$

где

$$U(q) = -\frac{4\pi e^2}{q^2}$$

— компонента Фурье потенциальной энергии кулоновского взаимодействия позитрона и электрона. Уравнение (122,14) принимает вид

$$i\chi_{im}(p_-, -p_+) = = \left[G(p_-) \gamma^0 \int U(q - p_-) \chi(q, q - p_+ - p_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \cdot \gamma^0 G(-p_+) \right]_{im}, \quad (122,15)$$

где также заменены точные пропагаторы \mathcal{G} пропагаторами свободных электронов G . Для последних имеем приближенные выражения (ср. (122,8))

$$G(p_-) \approx \frac{1 + \gamma^0}{2} g(p_-), \quad G(-p_+) = \frac{1 - \gamma^0}{2} g(p_+),$$

где выделены матричные множители, а $g(p)$ — скалярная функция

$$g(p) = \frac{1}{\epsilon - m - \frac{p^2}{2m} + i0}. \quad (122,16)$$

¹⁾ Напомним, что скорости частиц в позитронии $v/c \sim \alpha$. В этом смысле разложения по α и по $1/c$ взаимно связаны.

При подстановке этих выражений в (122,15) замечаем, что все отличные от нуля матричные элементы

$$\left[\frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^0 \chi \gamma^0 \frac{1-\gamma^0}{2} \right]_{lm} = \left[\frac{\gamma^0+1}{2} \chi \frac{\gamma^0-1}{2} \right]_{lm}$$

совпадают с элементами $-\chi_{im}$. Поэтому матричное уравнение (122,15) эквивалентно уравнению для скалярной функции

$$i\chi(p_-, -p_+) = -g(p_-)g(p_+) \int U(q-p_-)\chi(q, q-p_+-p_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (122,17)$$

Введем теперь вместо p_+, p_- переменные

$$p \equiv (\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{p_- - p_+}{2}, \quad P = p_- + p_+$$

(4-импульсы относительно движения частиц и позитрония как целого). В системе центра инерции

$$P = (E + 2m, 0),$$

где полная энергия обозначена через $E + 2m$, т. е. E — уровень энергии, отсчитываемый от массы покоя. Выразив через эти переменные, переписываем (122,17) в виде

$$i\chi(p, P) = -g\left(p + \frac{P}{2}\right)g\left(-p + \frac{P}{2}\right) \int U(q-p)\chi\left(q - \frac{P}{2}, P\right) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} = -g\left(p + \frac{P}{2}\right)g\left(-p + \frac{P}{2}\right) \int U(q'-p)\chi(q', P) \frac{d^4q'}{(2\pi)^4}.$$

P входит в это уравнение уже только как параметр, функция χ входит в правую сторону равенства только в виде интеграла

$$\psi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(q, P) dq_0.$$

Проинтегрировав обе стороны равенства по $d\varepsilon$, получим из него замкнутое уравнение для ψ :

$$\psi(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(p + \frac{P}{2}\right)g\left(-p + \frac{P}{2}\right) d\varepsilon \int U(q-p)\psi(p) \frac{d^3q}{(2\pi)^3},$$

где

$$g\left(\pm p + \frac{P}{2}\right) = \frac{1}{\pm \varepsilon + \frac{E}{2} - \frac{p^2}{2m} + i0}.$$

Замкнув путь интегрирования по $d\varepsilon$, скажем, в верхней полуплоскости комплексного ε , вычисляем интеграл по вычету в соответствующем полюсе и окончательно получаем

$$\left(\frac{p^2}{m} - E\right)\psi(p) + \int U(p-q)\psi(q) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = 0. \quad (122,18)$$

Это и есть уравнение Шредингера для позитрония в импульсном представлении.

Если бы мы ограничились для $\tilde{\Gamma}$ диаграммами (122,2), но учли бы в них (а также и в \mathcal{G}) следующие члены разложения по $1/c$, мы получили бы уравнение Брейта (§ 83). Учет же диаграмм из (122,4) (вместе с дальнейшими членами разложения по $1/c$) дает радиационные поправки к уровням позитрония; однако вычисления становятся очень сложными.

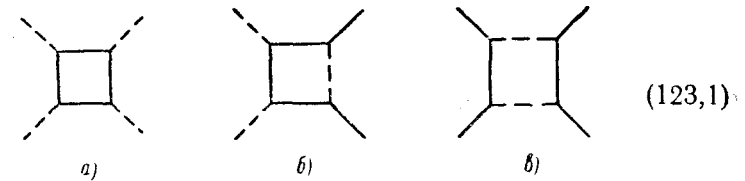
Приведем для справок вычисленную с этими поправками разность основных уровней орто- и парапозитрония¹⁾:

$$E({}^3S_1) - E({}^1S_0) = \alpha^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} \left\{ \frac{7}{6} - \left(\frac{16}{9} + \ln 2 \right) \frac{\alpha}{\pi} \right\} \quad (122,19)$$

(первый член в фигурных скобках — тонкое расщепление, см. задачу 2, § 84). Обратим внимание на то, что радиационная поправка к уровню — того же порядка величины, что и вероятность аннигиляции парапозитрония (см. (89,4)). Это значит, что в рассматриваемом приближении уровень 1S_0 становится комплексным ($E({}^1S_0)$ в (122,19) — его вещественная часть). Разумеется, комплексность уровней автоматически получится из уравнения (122,14) в соответствующем приближении.

§ 123. Двойное дисперсионное соотношение

Следующий по сложности за вершинной частью с тремя внешними линиями является блок с четырьмя концами. В квантовой электродинамике возможны три такие простейшие диаграммы:

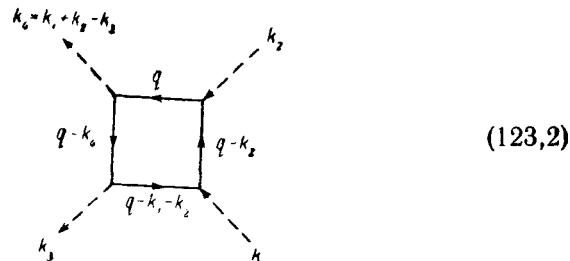


Первая из них описывает рассеяние фотона на фотоне. Остальные представляют собой отдельные члены радиационных поправок — к рассеянию фотона на электроне (диаграмма б) и к рассеянию электрона на электроне (диаграмма в).

Этот параграф посвящен изучению некоторых общих свойств диаграмм такого рода. Но для упрощения и конкретности мы будем вести изложение применительно к определенной диаграмме — (123,1, а)

¹⁾ R. Karplus, A. Klein, Phys. Rev. 87, 848 (1952).

Импульсы линий такой диаграммы обозначим следующим образом:



(123,2)

4-импульсы k_1, k_2, k_3, k_4 отвечают реальным фотонам, так что их квадраты равны нулю.

Отделив зависимость от поляризаций фотонов, амплитуду M_{fi} , соответствующую диаграмме (123,2), можно выразить через несколько скалярных функций 4-импульсов фотонов. Это — инвариантные амплитуды, о которых шла речь в § 71; конкретное выделение их для рассеяния фотона на фотоне будет произведено в следующем параграфе. Будучи скалярными, они зависят лишь от скалярных же переменных, в качестве которых можно выбрать, например, любые две из величин

$$s = (k_1 + k_2)^2, \quad t = (k_1 - k_3)^2, \quad u = (k_1 - k_4)^2, \quad s + t + u = 0; \quad (123,3)$$

ниже мы выбираем в качестве независимых s и t .

Каждая из инвариантных амплитуд (которые мы обозначим здесь той же буквой M) может быть представлена интегралом вида

$$M = \int \frac{iB d^4q}{[q^2 - m^2][(q - k_4)^2 - m^2][(q - k_1 - k_2)^2 - m^2][(q - k_3)^2 - m^2]}, \quad (123,4)$$

$$m^2 \rightarrow m^2 - i0,$$

где B — некоторая функция всех 4-импульсов; множители в знаменателе происходят от пропагаторов четырех виртуальных электронов.

При достаточно малых s и t амплитуды M вещественны (точнее, могут быть сделаны таковыми надлежащим выбором фазового множителя). Действительно, малость s обеспечивает невозможность рождения фотонами реальных частиц (электрон-позитронной пары) в s -канале, а малость t — такую же невозможность в t -канале¹⁾. Другими словами, в обоих каналах

¹⁾ Изображенные на диаграмме (123,2) направления внешних линий отвечают s -каналу. В t -канале входящими должны быть линии 1 и 3, так что 4-импульсами начальных фотонов были бы k_1 и $-k_3$. Физические области для рассеяния фотона на фотоне в переменных s, t, u — заштрихованные секторы на рис. 10. Так, s -каналу отвечает область, в которой $s > 0, t < 0, u < 0$.

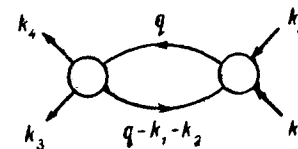
отсутствуют реальные промежуточные состояния, которые могли бы, согласно условию унитарности, привести к появлению мнимой части амплитуды.

Будем теперь увеличивать s при фиксированном (малом) значении t . При $s \geq 4m^2$ у амплитуды M появится мнимая часть, связанная с возможностью рождения пары двумя фотонами в s -канале. Поэтому для M можно написать дисперсионное соотношение «по переменной s »:

$$M(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_{1s}(s', t)}{s' - s - i0} ds', \quad (123,5)$$

где $A_{1s}(s, t)$ обозначает мнимую часть $M(s, t)$.

Как и для всякой диаграммы вида

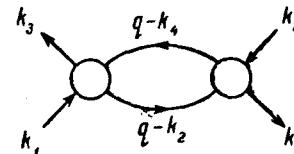


$A_{1s}(s, t)$ вычисляется по правилу (112,9) заменой в интеграле (123,4) соответствующих полюсных множителей δ -функциями:

$$2iA_{1s}(s, t) = (2\pi i)^2 \int \frac{iB \delta(q^2 - m^2) \delta[(q - k_1 - k_2)^2 - m^2]}{[(q - k_4)^2 - m^2][(q - k_3)^2 - m^2]} d^4q, \quad (123,6)$$

причем интегрирование производится по половине q -пространства, в которой $q^0 > 0$.

Мы можем сделать существенный дальнейший шаг, заметив, что интеграл (123,6) имеет структуру (в смысле своих полюсных множителей) того же типа, что и амплитуда реакции, изображающейся диаграммой вида



Поэтому и аналитические свойства $A_{1s}(s, t)$ как функции от t подобны аналитическим свойствам этой амплитуды. В частности, у функции $A_{1s}(s, t)$ может появиться (при увеличении t) мнимая часть только тогда, когда оба множителя в знаменателе будут одновременно обращаться в нуль. Это, однако, не произойдет сразу же после достижения значения $t = 4m^2$ — порога рождения пары в t -канале. Дело в том, что наличие δ -функций в подинтегральном выражении ограничивает область интегрирования

в q -пространстве, которая может оказаться несовместимой со значением $t = 4m^2$. Протяженность области интегрирования зависит от значения s (аргументы δ -функций содержат k_1 и k_2). Поэтому зависит от s и граничное значение $t = t_0(s)$, за которым функция $A_{1s}(s, t)$ становится комплексной.

Подобно тому как функция $M(s, t)$ выражается через свою мнимую часть $A_{1s}(s, t)$ формулой (123,5), так и функция $A_{1s}(s, t)$ в свою очередь выражается через $A_2(s, t) = \text{Im } A_{1s}(s, t)$ дисперсионным соотношением «по переменной t »:

$$A_{1s}(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_c(s)}^{\infty} \frac{A_2(s, t')}{t' - t - i0} dt'. \quad (123,7)$$

Подставив теперь (123,7) в (123,5), получим *двойное дисперсионное соотношение*, или *представление Мандельстама* для амплитуды $M(s, t)$:

$$M(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} \int_{t_c(s)}^{\infty} \frac{A_2(s', t')}{(s' - s - i0)(t' - t - i0)} dt' ds' \quad (123,8)$$

(S. Mandelstam, 1958).

Функцию $A_2(s, t)$ называют *двойной спектральной плотностью* функции $M(s, t)$. Ее можно получить из интеграла (123,6) повторным применением к нему правила замены (112,9). Обозначив для краткости

$$l_1 = q, \quad l_2 = q - k_4, \quad l_3 = q - k_2, \quad l_4 = q - k_1 - k_2, \quad (123,9)$$

получим

$$(2i)^2 A_2(s, t) = (2\pi i)^4 \int iB \delta(l_1^2 - m^2) \delta(l_2^2 - m^2) \delta(l_3^2 - m^2) \delta(l_4^2 - m^2) d^4q, \quad (123,10)$$

причем интегрирование производится по области $q^0 > 0$.

Следует, однако, иметь в виду, что формула (123,10) имеет лишь символический смысл. Дело в том, что область $s > 0$, $t > 0$ — нефизическая. Соответственно в этой области величины l_1, l_2, \dots при вещественных q оказываются, вообще говоря, комплексными; понятие же δ -функции при комплексных значениях аргумента не является полностью определенным. Точнее было бы говорить прямо о взятии вычетов в соответствующих полюсах исходного интеграла (123,4). В нашем случае это, однако, не играет роли. Условие обращения в нуль четырех знаменателей в (123,4) или четырех аргументов δ -функций полностью определяет компоненты 4-вектора q . Переходя к интегрированию по l_1^2, l_2^2, \dots (см. ниже) и формально оперируя с (123,10) по обычным правилам, мы найдем (с точностью до знака) выражение для A_2 .

Для дальнейших вычислений выберем систему центра инерции (в s -канале). Тогда

$$k_1 = (\omega, \mathbf{k}), \quad k_2 = (\omega, -\mathbf{k}), \quad k_3 = (\omega, \mathbf{k}'), \quad k_4 = (\omega, -\mathbf{k}'), \quad (123,11)$$

$$s = 4\omega^2, \quad t = -(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = -4\omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (123,12)$$

$$u = -(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2 = -4\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

где θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{k}' (угол рассеяния). Ось x пространственных декартовых координат направим по вектору $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$, а ось y — по $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$.

Преобразуем теперь интеграл (123,10), выбрав квадраты l_1^2, l_2^2, \dots в качестве новых переменных интегрирования (вместо четырех компонент q). Имеем

$$\frac{\partial(l_1^2)}{\partial q^\mu} = 2l_{1\mu}, \dots$$

Поэтому якобиан преобразования

$$\frac{\partial(l_1^2, l_2^2, l_3^2, l_4^2)}{\partial(q^0, q_x, q_y, q_z)} = 16D,$$

где D — определитель, составленный из 16 компонент четырех 4-векторов l_1, l_2, \dots . Интегрирование в (123,10) сводится просто к замене функций B и D в подынтегральном выражении их значениями при 2)

$$l_1^2 = l_2^2 = l_3^2 = l_4^2 = m^2. \quad (123,13)$$

Из условий $l_1^2 = l_4^2 = m^2$ получаем, как и в § 112,

$$q^0 = \omega, \quad q^2 = \omega^2 - m^2. \quad (123,14)$$

Остальные два условия дают

$$(q - k_1)^2 - m^2 = -2qk_4 = -2\omega^2 - 2q\mathbf{k}' = 0,$$

$$(q - k_2)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2q\mathbf{k} = 0,$$

так что

$$q\mathbf{k} = q\mathbf{k}' = -\frac{s}{4},$$

¹⁾ При $t > 0$: $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 < 0$, т. е. вектор $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ мнимый. Это затруднение, однако, легко обойти, раскрывая все векторные выражения при $t < 0$ и продолжая затем аналитическое продолжение к $t > 0$.

²⁾ Такой способ интегрирования автоматически учитывает лишь по одному из нулей аргументов δ -функций.

или в компонентах:

$$q^0 = \omega, \quad q_x = -\frac{s}{2(s+t)}, \quad q_y = 0, \\ q_z = \pm \sqrt{\omega^2 - m^2 - q_x^2} = \pm \left[\frac{st - 4m^2(s+t)}{4(s+t)} \right]^{1/2}. \quad (123,15)$$

Таким образом, интеграл (123,10) равен

$$A_2(s, t) = \frac{\pi^4}{4D} \sum (-iB), \quad (123,16)$$

где суммирование производится по двум значениям q из (123,15).

Определитель D можно записать с помощью единичного антисимметричного тензора:

$$D = e_{\mu\nu\rho\sigma} l_1^\mu l_2^\nu l_3^\rho l_4^\sigma = -e_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu k_2^\nu k_3^\rho k_4^\sigma = \\ = -e_{\mu\nu\rho\sigma} (q - k_1)^\mu (k_4 - k_1)^\nu (k_2 - k_1)^\rho k_1^\sigma$$

(при преобразованиях использована антисимметрия $e_{\mu\nu\rho\sigma}$). Заметив, что из четырех множителей временную компоненту имеет только k_1 , находим

$$D = -\omega q [(k + k')(k - k')].$$

Раскрыв это выражение при $t < 0$ и затем продолжив к $t > 0$, получим

$$D = -\omega q_z \sqrt{s+t} \sqrt{-t} \rightarrow \pm \frac{i}{4} \{st [st - 4m^2(s+t)]\}^{1/2}. \quad (123,17)$$

Нужный выбор знака в этом выражении можно установить на основании следующих соображений. Положим для простоты $B = 1$. Тогда видно, что в физической области ($s > 0, t < 0$) имеем $A_{1s}(s, t) < 0$. Действительно, оба знаменателя в подынтегральном выражении в (123,6) имеют одинаковый (отрицательный) знак:

$$(q - k_4)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2qk' < -2\omega(\omega - |q|) < 0, \\ (q - k_2)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2qk < -2\omega(\omega - |q|) < 0$$

(здесь использовано, что, в силу наличия двух δ -функций в числителе, имеет место (123,14) и потому $|q| < \omega$ ¹⁾). Из (123,7) видно тогда, что отрицательна должна быть и функция $A_2(s, t)$ при $s > 0, t > 0$ (если учесть, что, как видно из (123,16), эта функция знакопостоянна). Это значит, что в (123,17) надо

¹⁾ Разумеется, это не случайно. Отрицательность A_{1s} в действительности следует из условия унитарности, что особенно очевидно при $t = 0$, когда A_{1s} определяет полное сечение.

выбрать верхний знак, так что окончательно

$$A_2 = -\pi^4 \frac{\sum B}{\{st [st - 4m^2(s+t)]\}^{1/2}}. \quad (123,18)$$

Так как по своему смыслу функция $A_2(s, t)$ должна быть вещественна, то кроме положительности s и t имеется еще условие положительности выражения в квадратных скобках в знаменателе:

$$st - 4m^2(s+t) \geq 0, \\ s > 0, \quad t > 0. \quad (123,19)$$

Эти неравенства определяют область, по которой должно производиться интегрирование в двойном дисперсионном интеграле (123,8) (заштрихована на рис. 22). Ее границей является кривая

$$st - 4m^2(s+t) = 0$$

с асимптотами $s = 4m^2$ и $t = 4m^2$.

Дисперсионные соотношения в форме (123,5) и (123,8) еще не учитывают условий перенормировки, и при буквальном их применении интегралы оказались бы расходящимися и требовали бы регуляризации. Условие перенормировки для амплитуд $M(s, t)$ заключается в требовании

$$M(0, 0) = 0. \quad (123,20)$$

Действительно, амплитуда рассеяния фотона на фотоне должна обращаться в нуль, когда $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ (а потому и $s = t = 0$), поскольку $k = 0$ означает постоянный во времени и пространстве потенциал, которому не отвечает никакое физическое поле (мы еще вернемся к этому условию более детально в следующем параграфе).

Для автоматического учета этого условия надо написать дисперсионное соотношение «с вычитанием» (подобно переходу от (108,8) к (108,13)). Мы придем к такому соотношению естественным образом, произведя сначала тождественное преобразование соотношения (123,8) с помощью тождества

$$\frac{1}{(s'-s)(t'-t)} = \frac{st}{(s'-s)(t'-t)s't'} + \frac{s}{(s'-s)s't'} + \frac{t}{(t'-t)s't'} + \frac{1}{s't'}.$$

Подставив его в подынтегральное выражение в (123,8), получим

$$M(s, t) = \frac{st}{\pi^2} \iint \frac{A_2(s', t') ds' dt'}{(s'-s)(t'-t)s't'} + \\ + \frac{s}{\pi} \int \frac{f(s') ds'}{(s'-s)s'} + \frac{t}{\pi} \int \frac{g(t') dt'}{(t'-t)t'} + C,$$

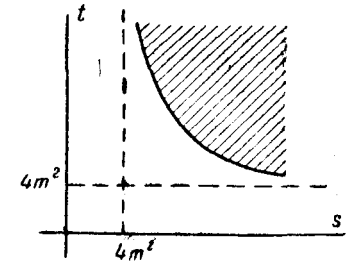


Рис. 22.

где

$$f(s) = \frac{1}{\pi} \int \frac{A_2(s, t')}{t'} dt', \quad g(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{A_2(s', t)}{s'} ds',$$

$$C = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{A_2(s', t')}{s't'} ds' dt'.$$

Последние равенства, однако, имели бы смысл лишь при условии сходимости всех интегралов. В противном же случае функциям $f(s)$, $g(t)$ и постоянной C должны быть предписаны заранее заданные значения, соответствующие условию перенормировки. Именно надо положить

$$C = 0, \quad f(s) = A_{1s}(s, 0), \quad g(t) = A_{1t}(0, t)$$

(где A_{1i} — мнимая часть $M(s, t)$, появляющаяся при увеличении t при заданном малом s , подобно тому как A_{1s} — мнимая часть, появляющаяся при увеличении s при заданном малом t). Первое из этих равенств очевидно: $C = M(0, 0) = 0$. Второе (и аналогичным образом третье) следует из сравнения равенства

$$M(s, 0) = \frac{s}{\pi} \int \frac{f(s') ds'}{(s' - s)s'}$$

с однократным дисперсионным соотношением (123,5), написанным «с вычитанием», отвечающим условию (123,20):

$$M(s, t) = \frac{s}{\pi} \int \frac{A_{1s}(s', t)}{(s' - s)s'} ds'. \quad (123,21)$$

Таким образом, окончательное двойное дисперсионное соотношение «с вычитанием»:

$$M(s, t) = \frac{st}{\pi^2} \iint \frac{A_2(s', t')}{(s' - s)(t' - t)s't'} ds' dt' + \frac{s}{\pi} \int \frac{A_{1s}(s', 0)}{(s' - s)s'} ds' + \frac{t}{\pi} \int \frac{A_{1t}(0, t')}{(t' - t)t'} dt'. \quad (123,22)$$

Если значения s, t сами лежат в области интегрирования, то интегралы (123,21—22), как всегда, надо понимать как предел при

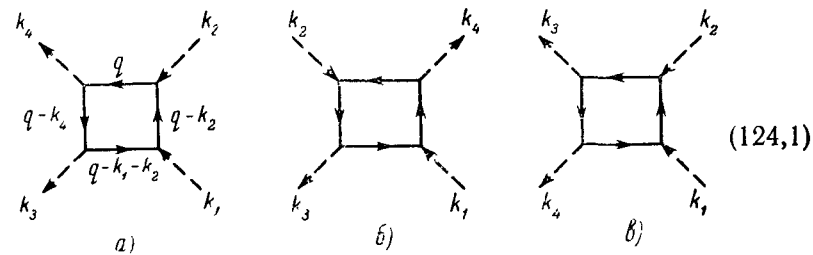
$$s \rightarrow s + i0, \quad t \rightarrow t + i0. \quad (123,23)$$

§ 124. Рассеяние фотона на фотоне

Рассеяние света на свете (в вакууме) является специфически квантовоэлектродинамическим процессом; в классической электродинамике оно отсутствует из-за линейности уравнений Максвелла¹⁾.

¹⁾ В предельном случае малых частот этот процесс был впервые рассмотрен Эйлером (H. Euler, 1936), а в ультрарелятивистском случае — А. И. Ахиезером (1937). Полное решение задачи дано Карплусом и Нейманом (R. Karplus, M. Neumann, 1951).

В квантовой электродинамике рассеяние фотона на фотоне описывается как результат рождения двумя начальными фотонами виртуальной электрон-позитронной пары и последующей аннигиляции этой пары в конечные кванты. Амплитуда этого процесса (в первом неисчезающем приближении) изображается шестью «квадратными» диаграммами со всеми возможными относительными расположениями их четырех концов. Сюда относятся диаграммы



и еще три диаграммы, отличающиеся от этих лишь изменением направления обхода внутренней электронной петли. Вклад этих последних совпадает с вкладом диаграмм (124,1), и потому полная амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = 2(M^{(a)} + M^{(b)} + M^{(c)}), \quad (124,2)$$

где $M^{(a)}, M^{(b)}, M^{(c)}$ — вклады диаграмм a, b, c .

Согласно (65,19) сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{d\omega'}{(2\omega)^2}, \quad (124,3)$$

где $d\omega'$ — элемент телесных углов для направления k' в системе центра инерции.

Инвариантные амплитуды

Выделив поляризационные множители четырех фотонов, представим M_{fi} в виде

$$M_{fi} = e_1^\lambda e_2^\mu e_3^{\nu*} e_4^{\rho*} M_{\lambda\mu\nu\rho}; \quad (124,4)$$

4-тензор $M_{\lambda\mu\nu\rho}$ (его называют тензором рассеяния фотона на фотоне) — функция 4-импульсов всех фотонов. Если написать аргументы функций со знаками, отвечающими одинаковым направлениям внешних концов диаграммы, то в силу симметрии совокупности диаграмм (124,1) очевидно, что тензор

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k_3, -k_4)$$

будет симметричен по отношению к любым перестановкам четырех аргументов вместе с одновременной такой же перестановкой его четырех индексов. В силу градиентной инвариантности амплитуда (124,4) не должна меняться при замене $e \rightarrow e + \text{const } k$. Другими словами, должно быть

$$k_1^\lambda M_{\lambda\mu\rho\sigma} = k_2^\mu M_{\lambda\mu\rho\sigma} = \dots = 0. \quad (124,5)$$

Как легко сообразить, отсюда следует, в частности, что разложение тензора рассеяния по степеням 4-импульсов k_1, k_2, \dots должно начинаться с членов, содержащих четверные произведения их компонент. Тем самым во всяком случае

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(0, 0, 0, 0) = 0. \quad (124,6)$$

Для конкретного выделения инвариантных амплитуд целесообразно, однако, с самого начала выбрать определенную калибровку 4-векторов поляризации e — калибровку, в которой

$$e_1^\mu = (0, \mathbf{e}_1), \quad e_2^\mu = (0, \mathbf{e}_2), \dots \quad (124,7)$$

Тогда

$$M_{fi} = M_{iklm} e_{1i} e_{2k} e_{3l}^* e_{4m}^*, \quad (124,8)$$

где M_{iklm} — трехмерный тензор.

В качестве независимых направлений поляризации введем для каждого из фотонов пару трехмерных поляризационных ортов $e^{(1)}, e^{(2)}$, выбрав их следующим образом:

$$e_1^{(1)} = e_2^{(1)} = e_3^{(1)} = e_4^{(1)} = \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']}{|[\mathbf{k}\mathbf{k}']|}, \quad e_1^{(2)} = \frac{1}{\omega} [\mathbf{k}e_1^{(1)}] = -e_2^{(2)}, \quad (124,9)$$

$$e_3^{(2)} = \frac{1}{\omega} [\mathbf{k}'e_3^{(1)}] = -e_4^{(2)}.$$

После этого тензор M_{iklm} можно представить в виде

$$M_{iklm} = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} e_{1i}^{(\lambda_1)} e_{2k}^{(\lambda_2)} e_{3l}^{(\lambda_3)} e_{4m}^{(\lambda_4)}; \quad (124,10)$$

16 величин $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ являются функциями от s, t, u и играют роль инвариантных амплитуд; не все они, однако, независимы.

Отметим, прежде всего, что $e^{(1)}$ — аксиальные, а $e^{(2)}$ — полярные векторы. Поскольку M_{iklm} — истинный трехмерный тензор, а $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ — истинные скаляры, то из требования P -инвариантности следует, что в наборах $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ должно быть по четному числу индексов 1 и 2; остальные же величины $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ обращаются в нуль. Далее, амплитуда M_{fi} должна быть инвариантна относительно перестановки двух начальных или двух конечных фотонов. Если произвести сразу обе перестановки ($k_1 \leftrightarrow k_2, k_3 \leftrightarrow k_4$), то переменные s, t, u не изменятся, а перестановка в поляризационных индексах приведет к соотношениям $M_{1212} = M_{2121}, M_{1221} = M_{2112}$.

Наконец, обращение времени означает замену

$$\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}'; \quad \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \leftrightarrow -\mathbf{e}_3^*, -\mathbf{e}_4^*$$

(ср. (71, 14), (71, 15)); при этом орты (124,9) преобразуются согласно

$$e_1^{(1)}, e_2^{(1)} \leftrightarrow -e_3^{(1)}, -e_4^{(1)}; \quad e_1^{(2)}, e_2^{(2)} \leftrightarrow e_3^{(2)}, e_4^{(2)}.$$

Условие T -инвариантности амплитуды рассеяния M_{fi} приводит поэтому еще и к равенству $M_{1122} = M_{2211}$.

Таким образом, имеется всего 8 отличных от нуля инвариантных амплитуд, из которых 5 независимы:

$$M_{1111}, M_{2222}, M_{1122} = M_{2211}, M_{1212} = M_{2121}, M_{1221} = M_{2112}. \quad (124,11)$$

Если подставить в (124,3) вместо M_{fi} одну из амплитуд $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$, то мы получим сечение рассеяния с заданными поляризациями начальных и конечных фотонов. Сечение же, просуммированное по конечным и усредненное по начальным поляризациям, получится заменой

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \{ |M_{1111}|^2 + |M_{2222}|^2 + 2|M_{1212}|^2 + 2|M_{1221}|^2 + 2|M_{1122}|^2 \}. \quad (124,12)$$

Соотношения симметрии (124,11) связывают между собой различные инвариантные амплитуды как функции одних и тех же переменных. Дальнейшие функциональные соотношения возникают как следствие кросс-симметрии (§ 79), если учесть, что амплитуда M_{fi} во всех каналах описывает одну и ту же реакцию (взаимное рассеяние двух фотонов) и потому не должна меняться при переходе от одного канала к другому.

Переход от s -канала (которому отвечает направление стрелок на диаграммах (124,1)) к t -каналу осуществляется перестановкой индексов 2 и 3 у всех переменных (импульсов и поляризации), т. е. заменой $s \leftrightarrow t$, и перестановкой индексов λ_2 и λ_3 у тензора рассеяния; переход от s - к u -каналу осуществляется аналогичной перестановкой индексов 2 и 4 (причем $s \leftrightarrow u$). Отсюда найдем следующие равенства ¹⁾:

$$\begin{aligned} M_{1111}(s, t, u) &= M_{1111}(t, s, u) = M_{1111}(u, t, s), \\ M_{2222}(s, t, u) &= M_{2222}(t, s, u) = M_{2222}(u, t, s), \\ M_{1122}(s, t, u) &= M_{1221}(u, t, s) = M_{1212}(t, s, u), \\ M_{1221}(s, t, u) &= M_{1221}(t, s, u), \\ M_{1212}(s, t, u) &= M_{1212}(u, t, s), \\ M_{1122}(s, t, u) &= M_{1122}(s, u, t). \end{aligned} \quad (124,13)$$

¹⁾ Поскольку три переменные s, t, u не независимы, то достаточно было бы писать во всех функциях два аргумента (например, два первых); мы сохраняем здесь все три переменные лишь с целью более ясного выявления симметрии их перестановок.

Таким образом, фактически достаточно вычислить всего три инвариантные амплитуды, например M_{1111} , M_{2222} и M_{1122} .

Соотношения (124,13) относятся к полным амплитудам — суммам вкладов всех трех диаграмм (124, 1). Но сами эти вклады связаны между собой соотношениями, очевидными из сравнения диаграмм. Так, диаграмма б) получается из а) заменой $k_2 \leftrightarrow -k_4$, $e_2 \leftrightarrow e_4^*$, и потому их вклады в инвариантные амплитуды получают друг из друга заменой переменных $s \leftrightarrow u$ и индексов $\lambda_2 \leftrightarrow \lambda_4$; аналогично вклад диаграммы в) получается из а) заменой $t \leftrightarrow u$, $\lambda_3 \leftrightarrow \lambda_4$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_{1111}(s, t, u) &= M_{1111}^{(a)}(s, t, u) + M_{1111}^{(a)}(u, t, s) + M_{1111}^{(a)}(s, u, t), \\ \frac{1}{2} M_{2222}(s, t, u) &= M_{2222}^{(a)}(s, t, u) + M_{2222}^{(a)}(u, t, s) + M_{2222}^{(a)}(s, u, t), \end{aligned} \quad (124,14)$$

$$\frac{1}{2} M_{1122}(s, t, u) = M_{1122}^{(a)}(s, t, u) + M_{1122}^{(a)}(u, t, s) + M_{1122}^{(a)}(s, u, t).$$

Таким образом, достаточно вычислить лишь вклады одной диаграммы в четыре амплитуды: $M_{1111}^{(a)}$, $M_{2222}^{(a)}$, $M_{1122}^{(a)}$, $M_{1122}^{(a)}$; первые три из этих функций сами еще симметричны относительно s и t , как это очевидно из вида диаграммы а) (симметричной относительно перестановки концов k_2 и k_3).

Вычисление амплитуд

Интеграл $M_{fi}^{(a)}$, отвечающий диаграмме (124, 1, а), имеет вид (123,4), причем

$$B^{(a)} = \frac{e^4}{\pi^2} \text{Sp} \{ \hat{e}_1(\hat{q} - \hat{k}_2 + m) \hat{e}_2(\hat{q} + m) \hat{e}_4^*(\hat{q} - \hat{k}_4 + m) \hat{e}_3^*(\hat{q} - \hat{k}_1 - \hat{k}_2 + m) \}. \quad (124,15)$$

Значение этого выражения, в котором в каждом из $e = (0, \mathbf{e})$ выбран в качестве \mathbf{e} один из ортов $e^{(\lambda)}$ (124,9), обозначим как $B_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(a)}$; интеграл (123, 4) с таким B есть $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(a)}$.

Интегралы (123,4) логарифмически расходятся. В соответствии с условием (124, 6) их регуляризация осуществляется вычитанием значения при $k_1 = k_2 = \dots = 0^1$. Вычисление регуляризованных интегралов, однако, чрезвычайно громоздко.

¹⁾ Отметим, что при суммировании вкладов всех диаграмм расходящиеся части интегралов взаимно сокращаются. В этом легко убедиться, заметив, что асимптотический (при $q \rightarrow \infty$) вид интеграла есть:

$$M_{\lambda \mu \nu \rho}^{(a)} \sim \int \text{Sp} (\gamma_\nu \hat{q} \gamma_\rho \hat{q} \gamma_\mu \hat{q} \gamma_\lambda \hat{q}) \frac{d^4 q}{(q^2)^4}.$$

Наиболее естественный путь для вычисления амплитуд рассеяния фотона на фотоне основан на использовании двойного дисперсионного соотношения (B. de Tollis, 1964). Этот метод наиболее полным образом учитывает симметрию диаграмм и почти полностью исключает трудности интегрирований. Проиллюстрируем ход вычислений на примере амплитуды M_{1111} .

Функция $A_{1s}^{(a)}(s, t)$ вычисляется согласно (123, 6). Ввиду наличия под интегралом двух δ -функций нам нужно значение B лишь при

$$l_1^2 = q^2 = m^2, \quad l_4^2 = (q - k_1 - k_2)^2 = m^2. \quad (124,16)$$

Вычисление по стандартным правилам приводит тогда к результату

$$B_{1111}^{(a)} = \frac{4e^4}{\pi^2} \left\{ 8(e^{(1)}q)^4 - \left[4(e^{(1)}q)^2 + \frac{s}{2} \right] (k_2q + k_4q) + 2(k_2q)(k_4q) - \frac{st}{4} \right\}. \quad (124,17)$$

Нам нужно (для подстановки в (123,22)) значение A_{1s} лишь при $t = 0$. Это равенство означает, что $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ и $k_2 = k_4$. Тогда интеграл (123,6) принимает вид

$$[A_{1s}^{(a)}(s, 0)]_{1111} = -\frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}} \int \frac{B_{1111}^{(a)} d\omega_q}{[(q - k_2)^2 - m^2]^2} \quad (124,18)$$

(ср. вывод (112,10)). Введя угол θ между \mathbf{q} и \mathbf{k} и угол φ между $e^{(1)}$ и проекцией \mathbf{q} на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{k} , имеем (при $t = 0$)

$$\begin{aligned} qk_2 = qk_4 &= \omega(\omega - |\mathbf{q}|\cos\theta), \quad qe^{(1)} = -|\mathbf{q}|\sin\theta\sin\varphi, \\ (q - k_2)^2 - m^2 &= -2\omega(\omega - |\mathbf{q}|\cos\theta). \end{aligned}$$

После подстановки в (124,17—18) интеграл по $d\omega_q = \sin\theta d\theta d\varphi$ берется элементарно и в результате дает

$$\begin{aligned} [A_{1s}^{(a)}(s, 0)]_{1111} &= -4\pi e^4 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{16m^2}{s} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{8m^2}{s} \right) \text{Arch} \frac{\sqrt{s}}{2m} \right]. \end{aligned} \quad (124,19)$$

После усреднения по направлениям q (ср. (127,10)) след легко вычисляется и дает

$$M_{\lambda \mu \nu \rho}^{(a)} \sim (g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho} + g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - 2g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}) \int \frac{d^4 q}{(q^2)^2}.$$

Суммирование по диаграммам означает симметризацию этого выражения по индексам λ, μ, ν, ρ , в результате чего оно обращается в нуль. Подчеркнем, однако, что это сокращение имеет в известном смысле случайный характер и не устраняет необходимости в регуляризации, хотя она и сводится при этом к вычитанию конечной величины.

Функция $[A_{1t}^{(a)}(0, t)]_{1111}$ в силу симметрии $M_{1111}^{(a)}$ отличается от (124,19) лишь заменой $s \rightarrow t$.

Для вычисления функции $A_2^{(a)}(s, t)$ согласно (123,18) требуется значение $B^{(a)}$ при значениях (123,15), удовлетворяющих, помимо (124,16), также и условиям $(q - k_2)^2 = m^2$, $(q - k_4)^2 = m^2$; при этом

$$k_2 q = k_4 q = 0, \quad (e^{(1)} q)^2 = q_z^2 = \frac{st - 4m^2(s+t)}{s+t}.$$

Подстановка в (124,17) и затем (124,17) в (123,18) дает

$$[A_2^{(a)}(s, t)]_{1111} = 8\pi^2 e^4 \frac{st - 8 \left[\frac{st - 4m^2(s+t)}{4(s+t)} \right]^2}{\{st[st - 4m^2(s+t)]\}^{1/2}}. \quad (124,20)$$

После вычисления функций A_{1s} , A_{1t} , A_2 дисперсионное соотношение (123,22) дает амплитуду M непосредственно в виде одно- и двукратных определенных интегралов. Приведем здесь для справок окончательный результат для всех четырех амплитуд $M^{(a)}$, достаточных согласно (124,14) для полного вычисления амплитуд рассеяния¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\alpha^2} M_{1111}^{(a)}(s, t) &= \frac{1}{3} + \frac{s-t}{s+t} [B(s) - B(t)] - \\ &- \left\{ 1 - 4 \frac{t-2s}{s(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} T(s) - \left\{ 1 - 4 \frac{s-2t}{t(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} T(t) + \\ &+ \left\{ 1 - \frac{2}{st} \left(4 - \frac{st}{s+t} \right)^2 \right\} I(s, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\alpha^2} M_{2222}^{(a)}(s, t) &= -1 + \frac{s-t}{s+t} [B(s) - B(t)] - \\ &- \left\{ 1 + \frac{4t}{s(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} T(s) - \left\{ 1 + \frac{4s}{t(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} T(t) + \\ &+ \left\{ 1 - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} I(s, t), \end{aligned} \quad (124,21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\alpha^2} M_{1122}^{(a)}(s, t) &= -\frac{5}{9} + \frac{s-t}{s+t} B(s) + \left\{ \frac{5}{3} + \frac{16}{3t} - \frac{2s}{s+t} \right\} B(t) - \\ &- \left\{ 1 + \frac{4}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} [T(s) + T(t)] + \\ &+ \left\{ 1 - \frac{4}{t} + \frac{8}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} I(s, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\alpha^2} M_{1221}^{(a)}(s, t) &= \frac{1}{9} - \left\{ \frac{5}{3} + \frac{16}{3s} - \frac{2t}{s+t} \right\} B(s) - \left\{ \frac{5}{3} + \frac{16}{3t} - \frac{2s}{s+t} \right\} B(t) + \\ &+ \left\{ 1 + \frac{4}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} [T(s) + T(t)] - \\ &- \left\{ 1 - \frac{4}{s} - \frac{4}{t} + \frac{8}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} I(s, t). \end{aligned}$$

Здесь $B(s)$, $T(s)$, $I(s, t)$ обозначают следующие функции:

$$\begin{aligned} B(s) &= \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4}{s}} \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{-s}}{2} - 1, & s < 0, \\ \sqrt{\frac{4}{s} - 1} \arcsin \frac{\sqrt{s}}{2} - 1, & 0 < s < 4, \\ \sqrt{1 - \frac{4}{s}} \operatorname{Arch} \frac{\sqrt{s}}{2} - 1 - \frac{i\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{s}}, & 4 < s; \end{cases} \\ T(s) &= \begin{cases} \left(\operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{-s}}{2} \right)^2, & s < 0, \\ - \left(\arcsin \frac{\sqrt{s}}{2} \right)^2, & 0 < s < 4, \\ \left(\operatorname{Arch} \frac{\sqrt{s}}{2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{4} - i\pi \operatorname{Arch} \frac{\sqrt{s}}{2}, & 4 < s; \end{cases} \end{aligned} \quad (124,22)$$

$$\begin{aligned} I(s, t) &= I(t, s) = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dy}{y(1-y) - \frac{s+t}{st}} \{ \ln[1 - i0 - sy(1-y)] + \ln[1 - i0 - ty(1-y)] \}. \end{aligned}$$

(Для упрощения записи в формулах (124,21–22), и только в них, буквы s и t обозначают отношения s/m^2 , t/m^2 .)

Сечение рассеяния

Предельному случаю малых частот ($\omega \ll m$) отвечают малые значения переменных s , t , u . Первые члены разложения инвариантных амплитуд по этим переменным:

$$\begin{aligned} M_{1111} &= M_{2222} = \frac{4e^4}{45m^4} (s^2 + t^2 + u^2), \\ M_{1122} &= \frac{e^4}{45m^4} (-4s^2 + 7t^2 + 7u^2). \end{aligned} \quad (124,23)$$

Вычисленное по этим амплитудам дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных фотонов (обычные единицы)

$$d\sigma = \frac{139}{4\pi^2 (90)^2} \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\omega}{mc^2} \right)^6 (3 + \cos^2 \theta)^2 d\theta' \quad (124,24)$$

¹⁾ Некоторые детали преобразований интегралов, различные представления трансцендентных функций B , T , I и предельные выражения — см. В. де Толлис, Nuovo Cimento 32, 757 (1964); 35, 1182 (1965).

и полное сечение ¹⁾

$$\sigma = \frac{973}{10125\pi} \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\omega}{mc^2}\right)^6 = 0,030 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\omega}{mc^2}\right)^6, \quad \hbar\omega \ll mc^2. \quad (124,25)$$

В обратном, ультрарелятивистском случае полное сечение рассеяния неполяризованных фотонов

$$\sigma = 4,7 \alpha^4 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2, \quad \hbar\omega \gg mc^2. \quad (124,26)$$

Зависимость этого сечения от частоты можно предвидеть из соображений размерности: при $\hbar\omega \gg mc^2$ полное сечение не должно зависеть от m , и тогда $\alpha^4 c^2/\omega^2$ — единственное выражение нужной размерности, пропорциональное e^8 ; коэффициент же в (124,26) — результат численного вычисления.

Наконец, укажем дифференциальное сечение рассеяния на малые углы в ультрарелятивистском случае:

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{\pi^2 \omega^2} \ln^4 \frac{1}{\theta} d\theta, \quad \frac{m}{\omega} \ll \theta \ll 1. \quad (124,27)$$

Это выражение справедливо с логарифмической точностью — следующий член разложения содержит на единицу меньшую степень большого логарифма. Для перехода к пределу $\theta = 0$ (рассеяние вперед) формула (124,27) непригодна. Вместо нее имеем здесь

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{\pi^2 \omega^2} \ln^4 \frac{\omega}{m} d\omega, \quad \theta \ll \frac{m}{\omega}. \quad (124,28)$$

Это выражение легко получить с помощью общих формул (124,21), положив в них $t = 0$ и заметив, что при $s \gg 1$ наиболее высокую (вторую) степень большого логарифма содержит лишь функция

$$T\left(\frac{s}{m^2}\right) \approx \frac{1}{4} \ln^2 \frac{s}{m^2} \approx \ln^2 \frac{\omega}{m}.$$

С этой точностью отличны от нуля лишь амплитуды

$$\begin{aligned} M_{1111} &= M_{2222} = \\ &= M_{1212} = -16e^4 \ln^2 \frac{\omega}{m}. \end{aligned}$$

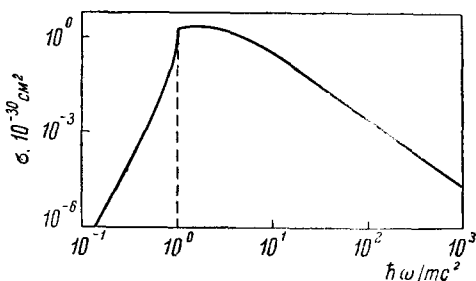


Рис. 23.

Это значит, в частности, что в этом случае поляризация фотона при рассеянии не меняется.

На рис. 23 изображен график зависимости полного сечения рассеяния от частоты (в логарифмической, по обеим осям, шка-

¹⁾ При переходе от $d\sigma$ к σ надо ввести множитель $1/2$, учитывающий тождественность двух конечных фотонов.

ле). Сечение убывает как в сторону малых, так и больших частот и достигает максимума при $\omega \approx 1,5 m$. Излом кривой при $\omega = m$ отражает изменение характера процесса в связи с появлением возможности образования реальной электронной пары.

Случай малых частот

В случае малых частот ($\omega \ll m$) амплитуду рассеяния фотона на фотоне можно получить также и совсем иным способом, исходя из поправочных членов в функции Лагранжа слабого электромагнитного поля (см. ниже, § 126).

Малая поправка к гамильтониану взаимодействия V' отличается лишь знаком от малой поправки к лагранжиану. Согласно (126,19) имеем

$$V' = - \frac{e^4}{45 \cdot 8\pi^2 m^4} \int \{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 + 7(\mathbf{E}\mathbf{H})^2\} d^3x. \quad (124,29)$$

Поскольку этот оператор — четвертого порядка по полю, то он имеет матричные элементы для интересующего нас перехода уже в первом приближении.

Для вычисления надо подставить в (124,29)

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (124,30)$$

$$\mathbf{A} = \sqrt{4\pi} \sum_{\kappa\lambda} (c_{\kappa\lambda} \mathbf{e}_{\kappa\lambda} e^{-i\kappa x} + c_{\kappa\lambda}^+ \mathbf{e}_{\kappa\lambda}^* e^{i\kappa x})$$

(λ — номер поляризации), после чего элемент S -матрицы вычисляется как

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \langle f | \int V' dt | i \rangle = \\ &= -i \langle 0 | c_{\kappa_3\lambda_3} c_{\kappa_4\lambda_4} \int V' dt c_{\kappa_1\lambda_1}^+ c_{\kappa_2\lambda_2}^+ | 0 \rangle \quad (124,31) \end{aligned}$$

(ср. §§ 73, 78). При нормировке \mathbf{A} , как в (124,30), амплитуда рассеяния M_{fi} непосредственно определяется по S_{fi} согласно

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) M_{fi} \quad (124,32)$$

(ср. § 65). Среднее значение в (124,31) вычисляется по теореме Вика с помощью (78,3), причем свертывать надо, разумеется, только «внешние» операторы $c_{\kappa\lambda}$, $c_{\kappa\lambda}^+$ с внутренними \mathbf{A} .

Приведем для справок амплитуду рассеяния, выраженную в явном виде через поляризации и направления фотонов:

$$M_{fi} = \frac{4}{45} \frac{\alpha^2 \omega^4}{m^4} (7R - 10S), \quad (124,33)$$

$$R = P(1234) + P(1324) + P(1432),$$

$$S = Q(1234) + Q(1324) + Q(1432),$$

$$P(1234) = (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_4 \mathbf{n}_3) + (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_4 \mathbf{n}_2) - \\ - (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \{ (1 - \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_4) [(\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_4 \mathbf{n}_1) + (\mathbf{e}_3 \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_4 \mathbf{n}_2)] - (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_4 \mathbf{n}_3) - \\ - (1 - \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_4 \mathbf{n}_1) - (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_4 \mathbf{n}_2) - (1 - \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_4 \mathbf{n}_3) \} - \\ - (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4) \{ (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) [(\mathbf{e}_1 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_3) + (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_4)] - (1 - \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_1) - \\ - (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_3) - (1 - \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_1) - (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_4) \} + \\ + (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4) [(1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_4) (1 - \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3) + (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3) (1 - \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_4)],$$

$$Q(1234) = (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_4 \mathbf{n}_3) + (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_4 \mathbf{n}_3) + \\ + (1 - \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4) (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_2 \mathbf{n}_1) + (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4) (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) (1 - \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_4),$$

где $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_4 = \mathbf{n}'$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/\omega$.

§ 125. Когерентное рассеяние фотона в поле ядра

Другим (наряду с рассеянием фотона на фотоне) нелинейным эффектом является когерентное (упругое) рассеяние фотона в постоянном электрическом поле, создаваемом неподвижным ядром. Этот процесс описывается теми же квадратными диаграммами (124,1), в которых, однако, две фотонные линии заменяются линиями внешнего поля¹⁾. Исчерпывающее исследование этого процесса до сих пор отсутствует. Поэтому мы ограничимся здесь лишь некоторыми качественными оценками.

В силу требований калибровочной инвариантности амплитуда рассеяния при $\omega \rightarrow 0$ должна содержать произведения компонент 4-импульсов начального (\mathbf{k}) и конечного (\mathbf{k}') фотонов (подобно тому как разложение амплитуды рассеяния фотона на фотоне начинается с четверных произведений компонент 4-импульсов всех фотонов). Другими словами, амплитуда рассеяния фотона малой частоты пропорциональна ω^2 . Учитывая также, что эта амплитуда содержит внешнее поле (поле ядра с зарядом Ze) во втором порядке, заключаем, что сечение рассеяния

$$d\sigma \sim Z^4 \alpha^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 d\theta \quad (\omega \ll m). \quad (125,1)$$

Зависимость от частоты находится, разумеется, в соответствии с общими заключениями § 60²⁾.

¹⁾ Диаграммы же с одним виртуальным и тремя реальными фотонными внешними линиями отвечают процессам распада одного фотона во внешнем поле на два фотона (и обратному процессу «слияния» двух фотонов в один).

²⁾ Отметим, что коэффициент в (125,1) нельзя вычислить с помощью найденной в § 126 функции Лагранжа однородного электромагнитного поля (как это можно было сделать для рассеяния света на свете). Причина заключается в том, что в данном процессе существенны расстояния от ядра $r \sim 1/m$, на которых поле ядра нельзя рассматривать как однородное.

Для оценки сечения при высоких частотах воспользуемся оптической теоремой (§ 72). Промежуточное состояние, фигурирующее в правой стороне соотношения унитарности, является в данном случае состоянием электрон-позитронной пары (ему отвечает рассеяние диаграмм по двум внутренним электронным линиям между фотонными концами). Поэтому оптическая теорема связывает амплитуду упругого рассеяния фотона на нулевой угол с полным сечением образования пары фотонов в поле ядра, $\sigma_{\text{пар}}$. Определив амплитуду $f(\omega, \theta)$ рассеяния на угол θ так, чтобы сечение рассеяния было $d\sigma = |f|^2 d\theta$ (ср. (72,5)), будем иметь

$$\text{Im} f(\omega, 0) = \frac{\omega}{4\pi} \sigma_{\text{пар}}.$$

Сечение $\sigma_{\text{пар}}$ отлично от нуля, разумеется, лишь при $\omega > 2m$. В ультрарелятивистском случае, взяв $\sigma_{\text{пар}}$ из (92,8) и ограничившись лишь логарифмической точностью, получим

$$\text{Im} f(\omega, 0) = \frac{7}{9\pi} (Z\alpha)^2 r_e \frac{\omega}{m} \ln \frac{\omega}{m} \quad (\omega \gg m). \quad (125,2)$$

Вещественная часть амплитуды рассеяния определяется по мнимой части дисперсионным соотношением. При этом в дисперсионном интеграле по частотам оказывается существенной область частот $\omega \sim m$, в которой большой логарифм в $\text{Im} f(\omega, 0)$ отсутствует. Поэтому, с той же логарифмической точностью, вещественной частью амплитуды можно пренебречь (при $\omega \gg m$) по сравнению с мнимой, и для сечения рассеяния на нулевой угол имеем

$$d\sigma|_{\theta=0} = \frac{49}{81\pi^2} (Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^2 \ln^2 \frac{\omega}{m} d\theta \quad (\omega \gg m) \quad (125,3)$$

(F. Rohrlich, R. L. Gluckstern, 1952).

Использованный здесь логарифмический член в сечении образования пар фотоном происходит от области очень малых углов (§ 92). Лишь к такой же области ($\theta \leq (m/\omega)^2$) может быть применена и формула (125,3); эта область дает поэтому очень малый вклад в полное сечение рассеяния. Основной же вклад в полное сечение дает (как и для процесса образования пар) область углов $\theta \leq m/\omega$; это легко понять на основании общего (не на нулевой угол) соотношения унитарности, связывающего друг с другом амплитуды рассеяния фотона и образования пар фотоном. В этой области, однако, логарифмический член отсутствует, так что полное сечение рассеяния

$$\sigma \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^2 \theta^2 \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \quad (125,4)$$

(H. A. Bethe, F. Rohrlich, 1952).

§ 126. Радиационные поправки к уравнениям электромагнитного поля

При квантовании электрон-позитронного поля (§ 25) мы видели, что в выражении для энергии вакуума появляется бесконечная постоянная, которую можно записать в виде ¹⁾

$$\mathcal{E}_0 = - \sum_{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma}^{(-)}, \quad (126,1)$$

где $-\varepsilon_{\rho\sigma}^{(-)}$ — отрицательные частоты решений уравнения Дирака. Сама по себе эта постоянная не имеет физического смысла, так как энергия вакуума равна нулю по определению. С другой стороны, при наличии электромагнитного поля уровни энергии $\varepsilon_{\rho\sigma}^{(-)}$ будут меняться. Эти изменения конечны и имеют определенный физический смысл. Они описывают зависимость свойств пространства от поля и меняют уравнения электромагнитного поля в вакууме.

Изменение уравнений поля выражается в изменении его функции Лагранжа. Плотность L функции Лагранжа является релятивистским инвариантом и потому может быть функцией лишь от инвариантов $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ и $\mathbf{E}\mathbf{H}$. Обычное выражение

$$L_0 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) \quad (126,2)$$

есть первый член разложения общего выражения по степеням инвариантов.

Мы найдем функцию Лагранжа в случае, когда поля \mathbf{E} и \mathbf{H} настолько медленно меняются в пространстве и времени, что их можно считать однородными и постоянными. Для этого необходимо, чтобы характерные частота ω и волновой вектор \mathbf{k} изменения поля удовлетворяли неравенствам

$$\omega \ll m, \quad |\mathbf{k}| \ll m. \quad (126,3)$$

Тогда можно считать, что L не содержит производных от полей.

Однако для того, чтобы поставленная задача имела смысл, необходимо еще предполагать электрическое поле достаточно слабым. Дело в том, что однородное электрическое поле может рождать из вакуума пары. Рассмотрение поля самого по себе как замкнутой системы допустимо, лишь если вероятность образования пар достаточно мала. Именно, должно быть

$$|\mathbf{E}| \ll \frac{m^2}{e} \left(= \frac{m^2 c^3}{e\hbar} \right) \quad (126,4)$$

¹⁾ Мы пишем здесь букву \mathcal{E} вместо E во избежание путаницы с напряженностью электрического поля.

(изменение энергии заряда e на расстоянии \hbar/mc должно быть мало по сравнению с mc^2). Мы увидим ниже (см. также задачу 2), что в таком случае вероятность образования пар экспоненциально мала.

Если наряду с электрическим полем имеется также и магнитное, то, вообще говоря, можно выбрать систему отсчета, в которой \mathbf{E} и \mathbf{H} параллельны. Тогда магнитное поле не влияет на движение заряда в направлении \mathbf{E} . Именно в этой системе (выбор которой и будет подразумеваться в дальнейших вычислениях) и должно выполняться условие (126,4).

Вычисление функции Лагранжа начнем с определения изменения W' энергии вакуума. Величина W' дается изменением за счет поля «нулевой энергии» (126,1). Из этой величины, однако, надо еще вычесть средние значения потенциальной энергии электронов в «состояниях» с отрицательной энергией. Последнее вычитание означает просто, что полный заряд вакуума по определению равен нулю.

Нулевая энергия при наличии поля:

$$\mathcal{E}_0 = - \sum_{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma}^{(-)} = \sum_{\rho\sigma} \int \psi_{\rho\sigma}^{(-)*} i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\rho\sigma}^{(-)} d^3x,$$

где $\psi_{\rho\sigma}^{(-)}$ — отрицательно-частотные решения уравнения Дирака в данном поле. Будем предполагать, что интегрирование ведется по единичному объему, а волновые функции нормированы на 1 в этом объеме; тогда \mathcal{E}_0 есть энергия единицы объема. Согласно сказанному выше из \mathcal{E}_0 надо вычесть величину

$$U_0 = \sum_{\rho\sigma} \int \psi_{\rho\sigma}^{(-)*} e\varphi \psi_{\rho\sigma}^{(-)} d^3x,$$

где $\varphi = -\mathbf{E}\mathbf{r}$ — потенциал однородного поля. Но согласно теореме о дифференцировании оператора по параметру (см. III, задача к § 11)

$$U_0 \equiv \mathbf{E} \sum_{\rho\sigma} \psi_{\rho\sigma}^{(-)*} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{E}} \psi_{\rho\sigma}^{(-)} d^3x = -\mathbf{E} \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial \varepsilon_{\rho\sigma}^{(-)}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \mathbf{E}}.$$

Таким образом, окончательно полное изменение плотности энергии вакуума

$$W' = \left(\mathcal{E}_0 - \mathbf{E} \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \mathbf{E}} \right) - \left(\mathcal{E}_0 - \mathbf{E} \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \mathbf{E}} \right)_{\mathbf{E}=\mathbf{H}=0}. \quad (126,5)$$

Свяжем W' с изменением плотности лагранжиана L' ($L=L_0 + L'$). Для этого воспользуемся общей формулой

$$W = \sum \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L,$$

где q — «обобщенные координаты» поля (см. II, § 32). Для электромагнитного поля роль величин q играют потенциалы \mathbf{A} и φ . Поскольку

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla\varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (126,6)$$

то из числа «скоростей» \dot{q} в L входит лишь $\dot{\mathbf{A}}$, а дифференцирование по $\dot{\mathbf{A}}$ эквивалентно дифференцированию по \mathbf{E} . Поэтому

$$W' = \mathbf{E} \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}} - L'. \quad (126,7)$$

Сравнив (126,5) и (126,7), находим

$$L' = -[\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0|_{\mathbf{E}=\mathbf{H}=0}]. \quad (126,8)$$

Таким образом, вычисление L' сводится к вычислению суммы (126,1).

Рассмотрим сначала случай, когда имеется лишь магнитное поле. «Отрицательные» уровни энергии электрона (заряд $e = -|e|$) в постоянном однородном поле $H_z = H$

$$-\epsilon_p^{(-)} = -\sqrt{m^2 + |e|H(2n-1+\sigma) + p_z^2}, \quad (126,9)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad \sigma = \pm 1$$

(см. задачу к § 32). Для вычисления суммы учтем, что число состояний в интервале dp_z есть

$$\frac{|e|H}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi}$$

(см. III, § 111); первый множитель есть число состояний с различными значениями p_x , от которых энергия не зависит. Кроме того, все уровни, за исключением лишь уровня с $n = 0, \sigma = -1$, двукратно вырождены: совпадают уровни с $n, \sigma = +1$ и $n+1, \sigma = -1$. Поэтому

$$-\mathcal{E}_0 = \frac{|e|H}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sqrt{m^2 + p_z^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m^2 + 2|e|Hn + p_z^2} \right\} dp_z. \quad (126,10)$$

Расходимость интегралов в (126,10) устраняется при вычислении L' (126,8) вычитанием значения суммы при $H = 0$. Для проведения этой «перенормировки» удобно вычислить сначала

сходящееся выражение

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_0}{(\partial m^2)^2} = \\ &= -\frac{|e|H}{2(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \left\{ (m^2 + p_z^2)^{-3/2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + 2|e|Hn + p_z^2)^{-3/2} \right\} dp_z = \\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{m^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + 2|e|Hn} \right\}. \end{aligned}$$

Суммирование в фигурных скобках можно свести к суммированию геометрической прогрессии следующим способом:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-m^2\eta} \left[2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2|e|Hn\eta} - 1 \right] d\eta = \\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-m^2\eta} \left[\frac{2}{1 - e^{-2|e|H\eta}} - 1 \right] d\eta = \\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-m^2\eta} \text{cth}(|e|H\eta) d\eta. \quad (126,11) \end{aligned}$$

Для нахождения L' надо теперь дважды проинтегрировать Φ по m^2 , после чего вычесть значение получающейся величины при $H = 0$. Находим

$$L' = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^3} \{ \eta|e|H \text{cth}(\eta|e|H) - 1 \} d\eta + c_1 + c_2 m^2, \quad (126,12)$$

где c_1 и c_2 зависят от H , но не зависят от m^2 .

Из соображений размерности и четности по \mathbf{H} очевидно, что L' , как функция от H и m , должна иметь вид

$$L' = m^4 f\left(\frac{H^2}{m^4}\right).$$

Поэтому членов, нечетных по m^2 , в L' вообще не может быть, так что $c_2 = 0$. Коэффициент же c_1 определяется из условия, чтобы разложение L' по степеням H^2 начиналось с члена $\sim H^4$. Действительно, член $\sim H^2$ в L' означал бы просто изменение коэффициента в исходном лагранжиане $L_0 = -H^2/8\pi$. Но это было бы, по существу, изменением определения напряженности поля, а тем самым и заряда. Поэтому устранение членов $\sim H^2$ означает перенормировку заряда. Легко проверить, что для этого

надо положить

$$c_1 = \frac{H^2 e^2}{3 \cdot 8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta.$$

Наконец, произведя еще в (126,12) замену переменной $m^2 \eta \rightarrow \eta$, получим окончательно

$$L'(H; E=0) = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \left\{ -\eta b \operatorname{cth} b\eta + 1 + \frac{b^2 \eta^2}{3} \right\} e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3}, \quad (126,13)$$

где $b = |e|H/m^2$.

Вернемся к общему случаю, когда наряду с магнитным имеется также и параллельное ему электрическое поле E , удовлетворяющее условию (126,4).

Для вычисления L' в этом случае нет, однако, необходимости решать заново задачу об определении уровней энергии ($e_p^{(-)}$) электрона в поле. Достаточно заметить, что если искать волновую функцию — решение уравнения второго порядка (32,7) — в виде произведения

$$\psi = \psi_E(z) e^{ip_x x} \chi_{n\sigma}(y)$$

(где $\chi_{n\sigma}(y)$ — волновая функция в магнитном поле при $E=0$ и $p_x=0$), то масса m и поле H войдут в уравнение для $\psi_E(z)$ лишь в комбинации

$$m^2 + |e|H(2n+1+\sigma).$$

Если теперь учесть, что суммирование по p_x (от которого уровни энергии не зависят) по-прежнему дает множитель $|e|H/2\pi$, то из соображений размерности величину

$$\Phi(H, E) \equiv \frac{\partial^2 L'}{(\partial m^2)^2}$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(H, E) &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{F\left(\frac{m^2 + |e|H(2n+1+\sigma)}{|e|H}\right)}{m^2 + |e|H(2n+1+\sigma)} = \\ &= -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ F\left(\frac{1}{a}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F\left(\frac{1+2bn}{a}\right)}{1+2bn} \right\}, \quad a = \frac{|e|E}{m^2} \end{aligned} \quad (126,14)$$

(каждый член этой суммы есть $-d^2 e_p^{(-)}/(dm^2)^2$, просуммированное по всем квантовым числам, кроме n). Здесь F — неизвестная пока функция, которую мы найдем из соображений релятивистской инвариантности.

Действительно, Φ должно быть функцией скаляров $H^2 - E^2$ и $(EH)^2 = (EH)^2$:

$$\Phi(H, E) = f(H^2 - E^2, (EH)^2).$$

Поэтому

$$\Phi(0, E) = f(-E^2, 0) = \Phi(iE, 0).$$

Но функция $\Phi(iE, 0)$ получается из (126,11) заменой $H \rightarrow iE$; после переобозначения переменной интегрирования найдем

$$\Phi(iE, 0) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{-\eta/a} \operatorname{ctg} \eta d\eta. \quad (126,15)$$

Сравнив это выражение с пределом $\Phi(H \rightarrow 0, E)$, вычисленным из (126,14), мы сможем найти функцию F .

Переход к пределу $H \rightarrow 0$ в (126,14) производится путем замены суммирования по n интегрированием по $dn = dx/2b$:

$$\Phi(0, E) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty F\left(\frac{1+x}{a}\right) \frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{1/a}^\infty \frac{F(y)}{y} dy. \quad (126,16)$$

Приравняв выражения (126,15) и (126,16) и проинтегрировав это равенство по $1/a \equiv z$, получим

$$\frac{F(z)}{z} = -\int_0^\infty e^{-\eta z} \eta \operatorname{ctg} \eta d\eta.$$

После этого суммирование в (126,14) снова сводится к суммированию геометрической прогрессии, и дальнейшие вычисления аналогичны произведенным выше: выражаем Φ через m^2 , E и H , интегрируем дважды по m^2 , вычитаем значение при $E=H=0$ и определяем постоянные интегрирования, как при выводе (126,13). Окончательный результат ¹⁾:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left\{ -(\eta a \operatorname{ctg} \eta a) (\eta b \operatorname{cth} \eta b) + \right. \\ &\quad \left. + 1 - \frac{\eta^2}{3} (a^2 - b^2) \right\} d\eta, \quad (126,17) \\ a &= \frac{|e|E}{m^2} \left(= \frac{|e|\hbar E}{m^2 c^3} \right), \quad b = \frac{|e|H}{m^2} \left(= \frac{|e|\hbar H}{m^2 c^3} \right). \end{aligned}$$

¹⁾ Этот результат был впервые получен Гейзенбергом и Эйлером (W. Heisenberg, H. Euler, 1935). В изложенных вычислениях использованы также идеи вывода, предложенного Вейскопфом (V. Weisskopf, 1936).

Сразу же отметим несколько условный характер записи этой формулы. Она пригодна лишь при соблюдении условия малости электрического поля: $a \ll 1$ (126,4) (не учтенного в (126,17) в явном виде). Это проявляется в том, что подынтегральное выражение в (126,17) имеет полюсы при $\eta = n\pi/a$ ($n = 1, 2, \dots$), так что в написанном виде интеграл, строго говоря, не имеет смысла. Поэтому (126,17) может, по существу, служить лишь для получения членов асимптотического (см. ниже) ряда по степеням a путем формального разложения $\operatorname{ctg} a$.

Математически интегралу (126,17) можно придать смысл, обходя полюсы в плоскости комплексного η . При этом у L' , а тем самым и у плотности энергии W' появляется мнимая часть. Комплексность энергии, как обычно, означает квазистационарность состояния¹⁾. В данном случае стационарность нарушается рождением пар, а величины $-2\operatorname{Im} W'$ есть вероятность ω рождения пары в единице объема в единицу времени; так как малые добавки к W и L отличаются только знаком, то вероятность ω , выраженная через E и H , равна просто

$$\omega = 2 \operatorname{Im} L'. \quad (126,18)$$

Очевидно, что она пропорциональна $e^{-\pi/a}$ (см. ниже (126,20)). Именно благодаря экспоненциальной малости $\operatorname{Im} W'$ при $a \ll 1$ имеет смысл асимптотический ряд по степеням a с сохранением в нем любого конечного числа членов.

Рассмотрим предельные случаи формулы (126,17). В слабых полях ($a \ll 1$, $b \ll 1$) первые члены разложения:

$$L' = \frac{m^4}{8\pi^2} \frac{(a^2 - b^2)^2 + 7(ab)^2}{45} = \frac{e^4}{45 \cdot 8\pi^2 m^4} [(E^2 - H^2)^2 + 7(EH)^2]. \quad (126,19)$$

В частности, при $b = 0$ относительная поправка

$$\frac{L'}{L_0} = \alpha \frac{a^2}{45\pi}.$$

Отметим также, что после того, как L выражено (как в (126,19)) через инварианты $E^2 - H^2$ и EH , формула тем самым становится применимой в произвольной системе отсчета (а не только в той, где $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$).

Мнимая часть L' при $a \ll 1$ получается из интеграла (126,17) взятием полувычета в ближайшем к нулю полюсе котангенса, т. е. при $\eta a = \pi - i0$. Согласно (126,18) это дает вероятность рождения пары слабым электрическим полем:

$$\omega = \frac{m^4}{4\pi^3} \alpha^2 e^{-\pi/a} = \frac{1}{4\pi^3} \left(\frac{eE\hbar}{m^2 c^3} \right)^2 \frac{mc^2}{\hbar} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \exp\left(-\frac{\pi m^2 c^3}{|e|\hbar E}\right). \quad (126,20)$$

¹⁾ Направление обхода в интеграле должно быть выбрано так, чтобы было $\operatorname{Im} W' < 0$. Этому требованию отвечает обычное правило замены массы $m^2 \rightarrow m^2 - i0$ (т. е. в данном случае $a \rightarrow a + i0$).

В сильном магнитном поле ($a = 0$, $b \gg 1$) исходим из формулы (126,13), записанной (после замены $b\eta \rightarrow \eta$) в виде

$$L' = \frac{m^4 b^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta/b}}{\eta} \left[\frac{1}{3} - \frac{\eta \operatorname{ctg} \eta - 1}{\eta^2} \right] d\eta.$$

При $b \gg 1$ в этом интеграле существенна область $1 \ll \eta \ll b$. В ней $e^{-\eta/b} \approx 1$, и можно пренебречь вторым членом в скобках, а интеграл обрезать (с логарифмической точностью) на пределах $\eta \approx 1$ и $\eta \approx b$. Тогда

$$L' = \frac{m^4 b^2}{24\pi^2} \ln b \quad (126,21)$$

(более точное вычисление заменяет $\ln b$ на $\ln b - 2,29$). В этом случае отношение

$$\frac{L'}{L_0} \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln b.$$

Отсюда видно, что радиационные поправки к уравнениям поля могли бы достигнуть относительного порядка единицы лишь в экспоненциально больших полях:

$$H \sim \frac{m^2}{|e|} e^{3\pi/\alpha}. \quad (126,22)$$

Тем не менее вычисленные поправки имеют смысл: они нарушают линейность уравнений Максвелла и тем самым приводят к наблюдаемым, в принципе, эффектам (например, к рассеянию света на свете или во внешнем поле).

Связь напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} с потенциалами \mathbf{A} и ϕ остается, по определению, прежней — (126,6). Поэтому не меняется также и первая пара уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Вторая же пара уравнений получается путем варьирования действия

$$S = \int (L_0 + L') d^4x$$

по \mathbf{A} и ϕ . Они могут быть записаны в виде

$$\operatorname{rot} (\mathbf{H} - 4\pi \mathbf{M}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}), \quad (126,23)$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 0, \quad (126,24)$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{H}}. \quad (126,25)$$

По форме уравнения (126,23—24) совпадают с макроскопическими уравнениями Максвелла для поля в материальной среде¹⁾. Отсюда видно, что величины \mathbf{P} и \mathbf{M} имеют смысл векторов электрической и магнитной поляризации вакуума.

Отметим, наконец, что \mathbf{P} и \mathbf{M} обращаются в нуль для поля плоской волны, в котором, как известно, оба инварианта $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ и $\mathbf{E}\mathbf{H}$ равны нулю. Другими словами, для плоской волны нелинейные поправки в вакууме отсутствуют.

Задачи

1. Определить поправку к полю малого неподвижного заряда e_1 , связанную с нелинейностью уравнений Максвелла.

Решение. При $\mathbf{H} = 0$ имеем из (126,19)

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\alpha^2}{90\pi^2 m^4} \mathbf{E} \mathbf{E}^2. \quad (1)$$

В центрально-симметричном случае из (126,24) имеем

$$(E + 4\pi P) r^2 = \text{const} = e_1 \quad (2)$$

(постоянная определена из условия, что при $r \rightarrow \infty$ поле совпадает с кулоновским полем заряда e_1). Приближенно решая (2), получаем

$$E = \frac{e_1}{r^2} \left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{45\pi m^4 r^4} \right),$$

или

$$\Phi = \frac{e_1}{r} \left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{225\pi m^4 r^4} \right). \quad (3)$$

Нелинейную по e_1 поправку в (3) следует отличать от линейной поправки в (111,6), связанной в конечном счете с неоднородностью кулоновского поля. Поправка (3) более высокого порядка по α , но медленнее убывает с расстоянием и быстрее растет с ростом e_1 .

2. Непосредственно оценить вероятность рождения пары в слабом однородном постоянном электрическом поле в квазиклассическом приближении с экспоненциальной точностью (F. Sauter, 1931).

Решение. Движение в слабом поле \mathbf{E} (медленно меняющийся потенциал $\Phi = -\mathbf{E}\mathbf{r} = -Ez$) квазиклассично. Поскольку в амплитуду реакции волновая функция конечного позитрона входит в виде начальной «отрицательно-частотной» функции, то рождение пары можно рассматривать как переход электрона из «отрицательно-частотного» в «положительно-частотное» состояние. В первом из них при наличии поля квазиклассический импульс $p(z)$ определяется равенством

$$\epsilon = -\sqrt{p^2(z) + m^2} + |e| Ez, \quad (1)$$

а во втором

$$\epsilon = +\sqrt{p^2(z) + m^2} + |e| Ez. \quad (2)$$

Переход из первого состояния во второе есть переход через потенциальный барьер (область мнимого $p(z)$), разделяющий области зависимостей (1) и (2)

¹⁾ При сравнении надо помнить, что в макроскопической электродинамике среднее значение магнитного поля обозначается через \mathbf{B} , а не \mathbf{H} , как здесь.

с вещественными $p(z)$ при заданном ϵ . Границы этого барьера z_1 и z_2 лежат при $p(z) = 0$, т. е.

$$\epsilon = -m + |e| Ez_1, \quad \epsilon = +m + |e| Ez_2.$$

Вероятность перехода через квазиклассический барьер

$$\omega \propto \exp \left(-2 \int_{z_1}^{z_2} |p(z)| dz \right) = \exp \left(-4 \frac{m^2}{eE} \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^2} d\xi \right),$$

откуда

$$\omega \propto \exp \left(-\frac{\pi m^2}{|e| E} \right)$$

в согласии с (126,20).

§ 127. Вычисление интегралов по четырехмерным областям

Сведем здесь некоторые правила и формулы, полезные для вычисления интегралов, возникающих в теории радиационных поправок.

Типичная форма интеграла, отвечающего диаграмме Фейнмана:

$$\int \frac{f(k) d^4 k}{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad (127,1)$$

где a_1, a_2, \dots — полиномы второй степени по 4-вектору k , $f(k)$ — полином какой-либо степени n' , а интегрирование производится по всему четырехмерному k -пространству.

Удобный метод вычисления таких интегралов (принадлежащий Фейнману, 1949) основан на предварительном преобразовании (параметризации) подынтегрального выражения путем введения дополнительных интегрирований по вспомогательным переменным ξ_1, ξ_2, \dots согласно формуле

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 d\xi_1 \dots \int_0^1 d\xi_n \frac{\delta(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1})}{(a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n)^n}. \quad (127,2)$$

В результате такого преобразования вместо n различных квадратичных полиномов в знаменателе возникает n -я степень всего одного полинома второй степени.

Устранив δ -функцию интегрированием по $d\xi_n$ и введя новые переменные согласно

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_{n-1}, & \xi_2 &= x_{n-2} - x_{n-1}, & \dots, & \xi_{n-1} &= x_1 - x_2, \\ & & \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1} &= x_1. \end{aligned}$$

получим формулу (127,2) в эквивалентном виде:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{[a_1 x_{n-1} + a_2 (x_{n-2} - x_{n-1}) + \dots + a_n (1 - x_1)]^n}. \quad (127,3)$$

При $n = 2$ эта формула имеет вид

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a_1 x + a_2 (1-x)]^2} \quad (127,4)$$

и проверяется прямым вычислением. Для произвольного же n формула может быть доказана по индукции от $n-1$ к n . Действительно, произведя в (127,3) интегрирование по dx_{n-1} , получим в правой стороне равенства разность двух $(n-2)$ -кратных интегралов того же вида. Предполагая для них формулу справедливой, получим

$$\frac{1}{a_1 - a_2} \left[\frac{1}{a_2 a_3 \dots a_n} - \frac{1}{a_1 a_3 \dots a_n} \right],$$

что совпадает с выражением в левой стороне равенства (127,3).

Дифференцированием (127,3) по a_1, a_2, \dots можно получить аналогичные формулы, служащие для параметризации интегралов, содержащих в знаменателях какие-либо из полиномов в степенях выше первой.

Регуляризация расходящихся интегралов осуществляется вычитанием из них интегралов аналогичного вида. Для вычисления такой разности может оказаться целесообразным предварительное преобразование разности подынтегральных выражений (каждое из которых уже было преобразовано с помощью (127,2)) с помощью формулы

$$\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} = - \int_0^1 \frac{n(a-b) dz}{[(a-b)z + b]^{n+1}}. \quad (127,5)$$

После преобразования согласно (127,3) четырехмерное интегрирование в (127,1) приводится к виду

$$\int \frac{f(k) d^4 k}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^n}, \quad (127,6)$$

где l — 4-вектор, а α^2 — скаляр, зависящие оба от параметров x_1, \dots, x_{n-1} ; скаляр α^2 будем считать положительным.

Если интеграл (127,6) сходится, то в нем можно произвести замену переменных согласно $k-l \rightarrow k$ (сдвиг начала координат), после чего он принимает вид

$$\int \frac{f(k) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n} \quad (127,7)$$

(с другой функцией $f(k)$), так что знаменатель содержит лишь квадрат k^2 . Что касается числителя, то достаточно ограничиться рассмотрением скалярных функций $f = F(k^2)$. Действительно, для интегралов с числителями другого вида имеем

$$\int \frac{k^\mu F(k^2) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n} = 0, \quad (127,8)$$

$$\int \frac{k^\mu k^\nu F(k^2) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \int \frac{k^2 F(k^2) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n}, \quad (127,9)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma F(k^2) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n} = \\ = \frac{1}{24} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \int \frac{(k^2)^2 F(k^2) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n} \end{aligned} \quad (127,10)$$

и т. д., как это очевидно уже из соображений симметрии (при интегрировании по всем направлениям k).

В исходном интеграле (127,1) каждый из множителей a_1, a_2, \dots в знаменателе имеет (как функция от k_0) по два нуля, которые обходятся при интегрировании по dk_0 согласно обычному правилу (§ 76). После преобразования к виду (127,7) вместо $2n$ простых полюсов подынтегральное выражение имеет всего два полюса n -го порядка, которые обходятся по тому же правилу (путь C на рис. 24). Смещая контур интегрирования, как показано стрелками, можно совместить его с мнимой осью в плоскости k_0 (C' на рис. 24). Другими словами, переменная k_0 заменится на $k_0 = ik'_0$ с вещественной переменной k'_0 . Изменив также обозначение k на k' , будем иметь

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \rightarrow -(k_0'^2 + \mathbf{k}'^2) = -k'^2, \quad (127,11)$$

где k' — 4-вектор в евклидовой метрике. При этом $d^4 k$ переходит в

$$d^4 k \rightarrow id^4 k' = ik'^2 d \frac{k'^2}{2} d\Omega,$$

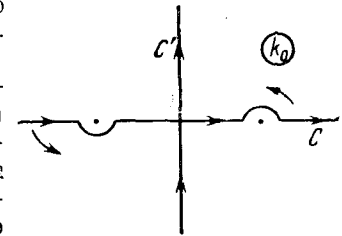


Рис. 24.

где $d\Omega$ — элемент четырехмерных телесных углов. Интегрирование по $d\Omega$ дает $2\pi^2$ (см. II, § 107), после чего

$$d^4k \rightarrow i\pi^2 k'^2 d(k'^2). \quad (127,12)$$

Обозначив $k'^2 = z$, получим окончательно

$$\int \frac{F(k^2) d^4k}{(k^2 - \alpha^2)^n} = (-1)^n i\pi^2 \int_0^\infty \frac{F(-z) z dz}{(z + \alpha^2)^n}. \quad (127,13)$$

В частности,

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 - \alpha^2)^n} = \frac{(-1)^n i\pi^2}{\alpha^{2(n-2)} (n-1)(n-2)}. \quad (127,14)$$

Логарифмически расходящаяся часть в интегралах (127,7) может быть выделена в виде

$$\int \frac{d^4k}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^2}. \quad (127,15)$$

Легко видеть, что и в таком интеграле допустимо преобразование $k \rightarrow k+l$. Действительно, разность первоначального и преобразованного интегралов

$$\int \left\{ \frac{1}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^2} - \frac{1}{(k^2 - \alpha^2)^2} \right\} d^4k$$

представляет собой сходящийся интеграл, и потому в нем замена $k \rightarrow k+l$ во всяком случае допустима. Произведя ее и заменив еще затем $k \rightarrow -k$, получим ту же величину с обратным знаком, откуда и следует ее равенство нулю.

Линейно расходящийся интеграл должен иметь вид

$$\int \frac{k^\mu d^4k}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^2}, \quad (127,16)$$

но фактически такой интеграл расходится лишь логарифмически: подынтегральное выражение асимптотически (при $k \rightarrow \infty$) равно $k^\mu/(k^2)^2$ и обращается в нуль при усреднении по направлениям. Сдвиг начала координат, однако, не оставляет интеграл (127,16) неизменным, а добавляет к нему аддитивную постоянную. Продемонстрируем это для случая бесконечно малого сдвига $k \rightarrow k + \delta l$, вычислив разность

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{k^\mu}{[(k-\delta l)^2 - \alpha^2]^2} - \frac{k^\mu + \delta l^\mu}{(k^2 - \alpha^2)^2} \right\} d^4k. \quad (127,17)$$

С точностью до членов первого порядка по δl

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{4k^\mu (k \delta l)}{(k^2 - \alpha^2)^3} - \frac{\delta l^\mu}{(k^2 - \alpha^2)^2} \right\} d^4k.$$

В первом члене усреднение по направлениям заменяет числитель на $k^2 \delta l^\mu$ (ср. (127,9)), после чего находим ¹⁾

$$\Delta^\mu = \alpha^2 \delta l^\mu \int \frac{d^4k}{(k^2 - \alpha^2)^3} = -\frac{i\pi^2}{2} \delta l^\mu. \quad (127,18)$$

В окончательных выражениях радиационных поправок часто фигурирует трансцендентная функция, определяемая интегралом

$$F(\xi) = \int_0^\xi \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (127,19)$$

(ее называют иногда *функцией Спенса*). Отметим здесь для справок некоторые ее свойства:

$$F(\xi) + F\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 \xi, \quad (127,20)$$

$$F(-\xi) + F(-1 + \xi) = -\frac{\pi^2}{6} + \ln \xi \ln(1 - \xi), \quad (127,21)$$

$$F(1) = \frac{\pi^2}{12}, \quad F(-1) = -\frac{\pi^2}{6}. \quad (127,22)$$

Разложение при малых ξ :

$$F(\xi) = \xi - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^3}{9} - \frac{\xi^4}{16} + \dots \quad (127,23)$$

¹⁾ Более громоздкое вычисление приводит к такому же результату и при конечном l .

ГЛАВА XIII

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 128. Асимптотическое поведение фотонного пропагатора при больших импульсах

В § 110 был вычислен первый (по α) член разложения поляризационного оператора $\mathcal{P}(k^2)$ и было найдено, что при $|k^2| \gg m^2$ с логарифмической точностью он имеет вид

$$\mathcal{P}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \ln \frac{|k^2|}{m^2}. \quad (128,1)$$

Там же было указано, что по смыслу вывода этой формулы (как поправки первого приближения к пропагатору $4\pi D^{-1} = k^2$) предполагалось выполненным условие

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \ll 1, \quad (128,2)$$

чем ограничивается применимость формулы со стороны больших $|k^2|$. Покажем теперь, что в действительности выражение (128,1) остается справедливым и при гораздо более слабом условии

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \leq 1. \quad (128,3)$$

Ход доказательства состоит в следующем¹⁾. Прежде всего, замечаем, что хотя при условии (128,3) вклад в $\mathcal{P}(k^2)$ может возникать, в принципе, от членов всех порядков (по α) в ряде теории возмущений, но в каждом (n -м) порядке надо учитывать только члены $\sim \alpha^n \ln^n (|k^2|/m^2)$, содержащие большой логарифм в той же степени, что и α ; члены с более низкими степенями логарифма заведомо малы в силу неравенства $\alpha \ll 1$.

Далее, исследование ряда теории возмущений для \mathcal{P} можно свести к исследованию рядов для \mathcal{G} и Γ^μ с помощью уравнения

Дайсона

$$\mathcal{P}(k^2) = i \frac{4\pi\alpha}{3} \text{Sp} \int \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k) \Gamma^\mu(p+k, p; k) \mathcal{G}(p) \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad (128,4)$$

(см. (104,4)). Поскольку функция $\mathcal{P}(k^2)$ калибровочно-инвариантна, то при ее вычислении можно выбрать любую калибровку для величин \mathcal{G} и Γ . Наиболее удобна для этой цели калибровка Ландау, в которой пропагатор свободных фотонов имеет вид (77,11):

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (128,5)$$

($D^{(0)} = 0$ в (100,17)). Оказывается, что в такой калибровке ряды теории возмущений для \mathcal{G} и Γ^μ вообще не содержат членов с нужными степенями логарифмов. Поэтому в (128,4) достаточно подставить для \mathcal{G} и Γ^μ их нулевые приближения: $\mathcal{G} = G$, $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$. Тогда выражение (128,4) сводится к интегралу

$$\mathcal{P}(k^2) = i \frac{4\pi\alpha}{3} \text{Sp} \int \gamma_\mu G(p+k) \gamma^\mu G(p) \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \quad (128,6)$$

Это — интеграл Фейнмана, отвечающий диаграмме (110,1) первого (по α) приближения, который и приводит (после соответствующей перенормировки) к формуле (128,1).

Приступая к доказательству сделанных утверждений, проследим прежде всего за происхождением логарифма в интеграле (128,6). Легко видеть, что логарифмический член возникает от области интегрирования

$$p^2 \gg |k^2| \quad \text{при} \quad |k^2| \gg m^2. \quad (128,7)$$

Действительно, формально разлагая G по степеням $1/\hat{p}$, имеем

$$G(p) \approx \frac{1}{\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{p^2},$$

$$G(p-k) \approx \frac{1}{\hat{p}-\hat{k}} \approx \frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{\hat{p}} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{\hat{p}} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{p^2} + \frac{\hat{p}\hat{k}\hat{p}}{(p^2)^2} + \frac{\hat{p}\hat{k}\hat{p}\hat{k}\hat{p}}{(p^2)^3}.$$

При подстановке в (128,6) первый член, не зависящий от k , выпадает в результате регуляризации (в соответствии с условием $\mathcal{P}/k^2 \rightarrow 0$ при $k^2 \rightarrow 0$). Второй член обращается в нуль при интегрировании по направлениям p . Третий же интеграл логарифмически расходится по p^2 ; взяв его в пределах от $p^2 \sim |k^2|$ (нижний предел области (128,7)) до некоторого вспомогательного «параметра обрезания» Λ^2 , получим

$$- \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}. \quad (128,8)$$

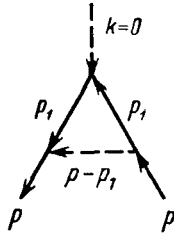
Для регуляризации следует вычесть из \mathcal{P}/k^2 его значение при $k^2 = 0$. Но поскольку логарифмическая точность предполага-

¹⁾ Излагаемая постановка вопроса и результаты принадлежат Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосову и И. М. Халатникову (1954).

ет условие $|k^2| \gg m^2$, то при вычислении с этой точностью регуляризация осуществляется вычитанием значения при $|k^2| \sim m^2$, в результате чего Λ^2 в аргументе логарифма замещается на m^2 и мы приходим к (128,1).

Так как интересующие нас поправки в \mathcal{G} и Γ^μ имеют логарифмический характер, то с их учетом \mathcal{G} и Γ^μ будут отличаться от G и γ^μ медленно меняющимися логарифмическими множителями. Поэтому и в точном интеграле (128,4) будет существенна та же область (128,7), что и в приближенном интеграле (128,6). Тем не менее положить просто $k=0$ в $\Gamma^\mu(p+k, p; k)$ нельзя: ввиду квадратичной расходимости интеграла его регуляризация требует рассмотрения также и двух следующих членов разложения $\Gamma^\mu(p+k, p; k)$ по степеням k . Мы, однако, ограничимся здесь обсуждением поправок к $\Gamma^\mu(p, p, 0)$, достаточно ясно демонстрирующим роль выбора калибровки и различие в характере интегралов, возникающих от диаграмм разных типов. Отметим также, что в аналогичном исследовании для \mathcal{G} нет необходимости, поскольку поправки в Γ и \mathcal{G} связаны друг с другом тождеством Уорда (105,8).

Первой (по α) поправке в $\Gamma(p, p; 0)$ отвечает диаграмма



и соответственно интеграл¹⁾

$$\Gamma^\mu{}^{(1)} = -i\alpha \int \gamma^\lambda G(p_1) \gamma^\mu G(p_1) \gamma^\nu D_{\lambda\nu}(p-p_1) \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4}. \quad (128,9)$$

В обычной калибровке имеем

$$D_{\lambda\nu}(p-p_1) = g_{\lambda\nu} \frac{4\pi}{(p-p_1)^2},$$

и в интеграле существенна область $p_1^2 \gg p^2$, в которой он логарифмически расходится. Вычислив интеграл

$$\Gamma^\mu{}^{(1)} \approx -4\pi\alpha i \int \frac{\gamma^\lambda \hat{p}_1 \gamma^\mu \hat{p}_1 \gamma_\lambda}{(p_1^2)^3} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \quad (128,10)$$

¹⁾ Во избежание недоразумений при сравнении с результатами § 114 напомним, что в § 114 оба электронных конца диаграммы предполагались физическими, между тем как здесь предполагается $p^2 \gg |k^2| \gg m^2$, т. е. обе линии заведомо не физические.

и регуляризовав логарифм, получим

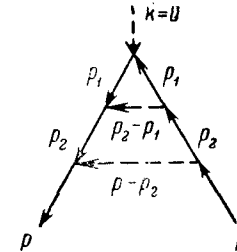
$$\Gamma^\mu{}^{(1)} \approx -\frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \ln \frac{p^2}{m^2}.$$

В калибровке же Ландау вместо (128,10) получим интеграл

$$\Gamma^\mu{}^{(1)} \approx -4\pi\alpha i \int \left\{ \gamma^\lambda \hat{p}_1 \gamma^\mu \hat{p}_1 \gamma_\lambda - p_1^2 \gamma^\mu \right\} \frac{d^4 p_1}{(p_1^2)^3 (2\pi)^4}.$$

Произведя усреднение по направлениям p_1 и приведение матриц γ , найдем, что этот интеграл обращается в нуль, так что логарифмический член в $\Gamma^\mu{}^{(1)}$ выпадает¹⁾.

В поправках второго (по α) порядка рассмотрим диаграмму



Соответствующий интеграл:

$$\Gamma^\mu{}^{(2)} = -\alpha^2 \int \gamma^\lambda G(p_2) \gamma^\nu G(p_1) \gamma^\mu G(p_1) \gamma^\rho G(p_2) \gamma^\sigma \times \\ \times D_{\nu\rho}(p_2-p_1) D_{\lambda\sigma}(p-p_2) \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8}.$$

При обычной калибровке D -функций этот интеграл содержит член с квадратом логарифма, происходящий от области интегрирования

$$p_1^2 \gg p_2^2 \gg p^2. \quad (128,11)$$

Действительно, после пренебрежения p_2 в аргументе функции $D_{\nu\rho}(p_2-p_1)$ интегрирование по $d^4 p_1$ становится таким же, как в (128,9), и дает $\ln p_2^2$; последующее же интегрирование по $d^4 p_2$ снова имеет логарифмический характер и приводит к квадрату $\ln^2(p_2^2/m^2)$. При выборе же для D -функций калибровки Ландау в обоих интегрированиях логарифмические члены выпадают.

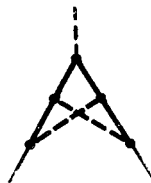
¹⁾ Поправки к G^{-1} в обеих калибровках, найденные из поправки $\Gamma^{(1)}$ с помощью тождества (105,8) находятся, как и следовало, в согласии с результатами § 116.

Такая же ситуация имеет место для всех других диаграмм, входящих в скелетную диаграмму



(128,12)

Диаграммы же других типов, с пересекающимися фотонными линиями, например, входящие в скелетную диаграмму



(128,13)

(ср. (103,11)), вообще не содержат членов с нужной степенью логарифма ни в какой калибровке (в них нельзя выделить такую область значений переменных, в которой интеграл сводился бы к нескольким последовательным логарифмическим интегрированиям).

Эти рассуждения (и аналогичные для следующих членов разложения Γ по степеням k) подтверждают, что в калибровке Ландау не возникает поправок к \mathcal{S} и Γ с нужными степенями логарифма, так что выражение (128,1) действительно справедливо и при условии (128,3).

Функция $\mathcal{D}(k^2)$, соответствующая поляризованному оператору (128,1), имеет вид

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2}}. \quad (128,14)$$

В силу условия (128,3) разлагать это выражение по степеням α нет необходимости¹⁾.

Обратим внимание на возрастание \mathcal{D} при приближении логарифма $\ln(|k^2|/m^2)$ к значению $3\pi/\alpha$. С этим возрастанием

¹⁾ Эта формула может быть выведена также и из функциональных свойств пропагаторов и вершинных частей, выражающих собой перенормируемость квантовой электродинамики; см. Л. Д. Ландау, О квантовой теории поля (статья в сборнике «Нильс Бор и развитие физики», 1955; Собрание трудов, том II, «Наука», 1969); Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, ЖЭТФ 30, 77 (1956). Систематическое развитие метода, основанного на использовании этих свойств (так называемый метод ренормализационной группы), дано в книге: Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.

связана граница применимости формулы (128,14) со стороны больших $|k^2|$. Действительно, вывод этой формулы основан на пренебрежении диаграммой (128,13) (и другими с еще большим числом жирных фотонных линий) по сравнению с диаграммой (128,12). Но добавление каждой такой линии привносит в диаграмму множитель $e^2 \mathcal{D}$ с точным пропагатором \mathcal{D} . При этом роль малого параметра играет, вместо $\alpha = e^2$, величина

$$\frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2}},$$

и потому законность указанных пренебрежений требует соблюдения условия

$$1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \gg \alpha. \quad (128,15)$$

Когда, по мере возрастания $|k^2|$, левая сторона этого неравенства по порядку величины сравнивается с α , из теории, по существу, вообще исчезает малый параметр. Мы приходим, таким образом, к важному выводу о логической неполноте квантовой электродинамики как теории со слабым взаимодействием. Между тем весь аппарат существующей теории связан именно с возможностью рассматривать электромагнитное взаимодействие как малое возмущение.

Можно было бы думать, что такая теория должна быть дополнена в области очень больших энергий теорией «сильной связи». Есть, однако, серьезные основания полагать, что в рамках существующих представлений и это невозможно, так что квантовая электродинамика оказывается не только неполной как теория «слабой связи», но и вообще в принципе логически не замкнутой физической теорией.

К этим выводам приводит анализ трудностей, возникающих в связи с формулой (128,14), если при ее выводе производить перенормировку не «на ходу», а путем предварительного введения «затравочного» заряда электрона e_c , который в дальнейшем подбирается так, чтобы привести к правильному наблюдаемому значению физического заряда e (§ 107). Если интеграл «обрезается», как это было сделано выше, на вспомогательном верхнем пределе Λ^2 , то затравочный заряд будет его функцией, $e_c = e_c(\Lambda)$ и в заключение должен быть произведен переход к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$.

При таком способе подхода к задаче поляризованного оператора будет

$$\mathcal{D}(k^2) = -\frac{e_c^2}{3\pi} k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}$$

(выражение (128,8) с e_c вместо e), и соответственно

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}. \quad (128,16)$$

Определив теперь физический заряд e согласно условию

$$e_c^2 \mathcal{D}(k^2) \rightarrow \frac{4\pi}{k^2} e^2 \quad \text{при} \quad k^2 \rightarrow \sim m^2,$$

получим

$$e^2 = \frac{e_c^2}{1 + \frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}, \quad (128,17)$$

или

$$e_c^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \quad (128,18)$$

Эти формулы, однако, сами по себе еще не дают возможности перейти к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$. Из (128,18) видно, что по мере увеличения Λ (при заданном значении e^2) e_c^2 растет; но уже при $e_c^2 \sim 1$ формулы теряют свою применимость, поскольку их вывод основан на предположении

$$e_c^2 \ll 1$$

как условия применимости теории возмущений к «затравочному» взаимодействию.

Это затруднение можно, однако, обойти с помощью следующих соображений (Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, 1955).

Пусть Λ^2/k^2 настолько велико, что

$$\frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} \gg 1,$$

но в то же время еще $e_c^2 \ll 1$. Тогда в (128,16) можно пренебречь единицей в знаменателе:

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{12\pi^2}{k^2 e_c^2 \ln^2 \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}, \quad (128,19)$$

и соответственно

$$e^2 = \frac{3\pi}{\ln^2 \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \quad (128,20)$$

Введем, взамен оператора 4-потенциала электромагнитного поля A^μ , 4-вектор $\mathfrak{A}^\mu = e_c A^\mu$. Тогда гамильтониан взаимодействия H_{int} не будет содержать затравочного заряда e_c , а гамиль-

тониан свободного поля H_0 (квадратичный по A^μ) будет содержать e_c^2 в знаменателе. Функция же $\mathfrak{D}(k^2)$, определенная по \mathfrak{A}^μ так, как $\mathcal{D}(k^2)$ определяется по A^μ , будет

$$\mathfrak{D}(k^2) = \frac{1}{e_c^2} \mathcal{D}(k^2) = \frac{12\pi^2}{k^2 \ln^2 \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}.$$

Это выражение не содержит e_c . Это значит, что оно соответствует пренебрежению в гамильтониане $H = H_0 + H_{\text{int}}$, зависящим от e_c , членом H_0 . Но если пренебрежение H_0 по сравнению с H_{int} возможно (при больших Λ) уже при $e_c^2 \ll 1$, то естественно думать, что оно тем более законно и при не малых значениях e_c^2 .

Таким образом, формула (128,19), а с нею и (128,20) перестают быть связанными с условием $e_c^2 \ll 1$ и переход к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$ становится возможным. Но при этом $e^2 \rightarrow 0$ вне зависимости от вида функции $e_c(\Lambda)$. Такая «нулификация» физического заряда означает невозможность строгого проведения перенормировки.

Изложенные соображения не могут, конечно, рассматриваться как строгое доказательство этого результата. Они являются, однако, серьезным указанием на возможную внутреннюю непоследовательность существующей квантовой электродинамики.

В то же время следует подчеркнуть, что в квантовой электродинамике описанные трудности могут иметь лишь чисто теоретическое значение. Они возникают при фантастически огромных энергиях $\sim m e^{3\pi/2\alpha}$, не представляющих никакого реального интереса. Можно ожидать, что в действительности уже несравненно раньше электромагнитные взаимодействия «запутываются» с сильными взаимодействиями, в результате чего чистая электродинамика теряет смысл.

§ 129. Выделение дважды логарифмических членов в вершинном операторе

Поправки вида $(\alpha L)^n$ (где L — большой логарифм) могут стать существенными, как уже было отмечено в конце предыдущего параграфа, лишь при фантастических энергиях и потому имеют только теоретическое значение. Но в амплитудах реальных процессов рассеяния возникают также и гораздо большие поправки — вида $(\alpha L^2)^n$. Такие члены, содержащие по квадрату логарифма на каждую степень α , называют *дважды логарифмическими*.

Так, согласно (114,21) первая поправка к электронному формфактору, т. е. к амплитуде рассеяния электрона во внешнем поле, при больших значениях квадрата переданного

импульса $t = q^2$ содержит член порядка

$$\frac{\alpha}{4\pi} \ln^2 \frac{|t|}{m^2}. \quad (129,1)$$

Условие применимости теории возмущений требует малости этой величины; оно нарушается при энергиях

$$\epsilon \sim \sqrt{t} \sim me^{V\pi/\alpha}, \quad (129,2)$$

которые хотя и очень велики, но все же гораздо меньше даваемых условием (128,3). Поставим себе целью освободиться от этого ограничения и получить формулы, пригодные при условии

$$\alpha \ln^2 \frac{\epsilon}{m} \leq 1. \quad (129,3)$$

Отметим прежде всего, что при этом условии однологарифмические поправки

$$\sim \alpha \ln \frac{\epsilon}{m} \leq \sqrt{\alpha} \ll 1$$

и потому могут быть опущены. Поскольку, с другой стороны, в \mathcal{G} и \mathcal{D} дважды логарифмические поправки вообще отсутствуют, то это значит, что эти функции можно полагать теперь равными просто их невозмущенным значениям G и D .

Вычисление же вершинного оператора Γ требует суммирования дважды логарифмических членов, возникающих из бесконечного ряда диаграмм. Этой задаче посвящен следующий параграф. Предварительно же изложим метод, позволяющий выделять дважды логарифмические члены из отдельных интегралов Фейнмана до фактического проведения в них интегрирования по всем переменным (В. В. Судаков, 1956).

Рассмотрим поправку первого (по α) порядка к вершинному оператору, изображаемому диаграммой (114,1), которую нам будет удобно изобразить здесь (переобозначив переменные) в виде

(129,4)

или, аналитически,

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{ie^2}{4\pi^3} \int \frac{\gamma^{\nu}(\hat{p}_2 - \hat{f} + m) \gamma^{\mu}(\hat{p}_1 - \hat{f} + m) \gamma_{\nu} d^4f}{[(p_2 - f)^2 - m^2 + i0][(p_1 - f)^2 - m^2 + i0][f^2 + i0]}. \quad (129,5)$$

Будем предполагать, что

$$|q^2| \gg p_1^2, p_2^2, m^2, \quad (129,6)$$

причем концы p_1, p_2 могут быть как физическими, так и виртуальными. Из (129,6) следует, что

$$|p_1 p_2| \approx \frac{1}{2} |q^2| \gg p_1^2, p_2^2, m^2, \quad (129,7)$$

т. е. 4-векторы p_1, p_2 имеют большие компоненты при малых квадратах — ситуация, возможная в силу псевдоевклидовости четырехмерной метрики. Дважды логарифмические члены возникают именно при условиях (129,6).

Мы увидим в дальнейшем, что при интегрировании по d^4f будут существенны относительно малые значения f . Поэтому можно пренебречь f в числителе подынтегрального выражения, после чего $\Gamma^{(1)}$ приобретает вид

$$\Gamma^{\mu(1)} = -\frac{ie^2}{4\pi^3} \gamma^{\nu}(\hat{p}_2 + m) \gamma^{\mu}(\hat{p}_1 + m) \gamma_{\nu} I_1, \quad (129,8)$$

где

$$I_1 = \int \frac{d^4f}{[(p_2 - f)^2 - m^2 + i0][(p_1 - f)^2 - m^2 + i0][f^2 + i0]}. \quad (129,9)$$

Матричный множитель в (129,8) можно упростить, если учесть, что Γ всегда входит в диаграммы, по существу, умноженным на матрицы $(\hat{p}_2 + m)$ и $(\hat{p}_1 + m)$:

$$(\hat{p}_2 + m) \Gamma (\hat{p}_1 + m). \quad (129,10)$$

Действительно, если линии p_1 и p_2 виртуальные, то эти множители происходят от $G(p_1)$ и $G(p_2)$; если же линии отвечают реальным электронам, то Γ умножается на \bar{u}_2 и u_1 , причем в силу уравнений Дирака имеем

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_2 \frac{\hat{p}_2 + m}{2m}, \quad u_1 = \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} u_1.$$

Переставляя порядок матричных множителей и пренебрегая каждый раз, согласно условию (129,7), возникающими квадратами p_1^2, p_2^2, m^2 по сравнению с $p_1 p_2$, получим

$$(\hat{p}_2 + m) \Gamma^{\mu(1)} (\hat{p}_1 + m) \approx -\frac{ie^2}{\pi^3} (p_1 p_2) (\hat{p}_2 + m) \gamma^{\mu} (\hat{p}_1 + m) I_1.$$

Поэтому окончательно можно представить $\Gamma^{(1)}$ в виде

$$\Gamma^{\mu(1)} = \frac{ie^2}{2\pi^3} \gamma^{\mu} t I_1, \quad (129,11)$$

где

$$t = q^2 \approx -2(p_1 p_2). \quad (129,12)$$

Отметим, что интеграл I_1 сходится при больших f и потому уже не требует регуляризации.

Основной пункт дальнейших вычислений — введение новых, более удобных переменных интегрирования.

Разобьем f на составляющие, тангенциальные и нормальные по отношению к плоскости p_1, p_2 :

$$f = up_1 + vp_2 + f_{\perp} \equiv f_{\parallel} + f_{\perp}, \quad (129,13)$$

$$f_{\perp} p_1 = f_{\perp} p_2 = 0. \quad (129,14)$$

В качестве же новых переменных выберем коэффициенты u, v и квадрат

$$\rho = -f_{\perp}^2. \quad (129,15)$$

Из условий (129,7) видно, что метрика в плоскости p_1, p_2 псевдо-евклидова. Поэтому временную ось можно выбрать в этой плоскости, так что f_{\perp} — пространственноподобный 4-вектор и $\rho > 0$.

Обозначим временно индексами 0, x компоненты 4-векторов в плоскости p_1, p_2 , а индексами y, z — компоненты в нормальной плоскости. Для преобразования элемента 4-объема

$$d^4f = d^2f_{\perp} d^2f_{\parallel}$$

к новым переменным пишем:

$$d^2f_{\perp} = |f_{\perp}| |d|f_{\perp}| d\varphi = \frac{1}{2} d\rho d\varphi \rightarrow \pi d\rho$$

(имея в виду, что подинтегральное выражение в (129,9) не зависит от угла φ). Далее,

$$d^2f_{\parallel} = \left| \frac{\partial (f_0, f_x)}{\partial (u, v)} \right| du dv = |p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x}| du dv \approx \frac{1}{2} |q^2| du dv.$$

Действительно ввиду малости квадрата p_2^2 имеем $p_{2x}^2 \approx p_{20}^2$, и поэтому

$$(p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x})^2 \approx (p_{10}p_{20} - p_{2x}p_{1x})^2 = (p_1 p_2)^2 = \left(\frac{q^2}{2}\right)^2.$$

Таким образом,

$$d^4f = \frac{1}{2} |t| du dv d^2f_{\perp} \rightarrow \frac{\pi}{2} |t| du dv d\rho. \quad (129,16)$$

Дальнейшие вычисления зависят от соотношения между величинами p_1^2, p_2^2, m^2 . Мы рассмотрим два случая.

Случай виртуальных электронных линий

Пусть импульсы p_1, p_2 отвечают виртуальным электронам, причем

$$|p_1^2|, |p_2^2| \gg m^2. \quad (129,17)$$

Мы увидим, что основной областью интегрирования, приводящей к дважды логарифмическому выражению, является в этом случае область, определяемая неравенствами

$$0 < \rho \ll |tu|, |tv|,$$

$$\left| \frac{p_1^2}{t} \right| \ll |v| \ll 1, \quad \left| \frac{p_2^2}{t} \right| \ll |u| \ll 1. \quad (129,18)$$

Соответственно этому в знаменателе подинтегрального выражения в (129,9) можно пренебречь m^2, p_1^2, p_2^2, f^2 по сравнению с $(p_1 f)$ или $(p_2 f)$, так что

$$I_1 = \int \frac{d^4f}{2(p_2 f) 2(p_1 f) (f^2 + i0)}. \quad (129,19)$$

Для величин же $p_1 f, p_2 f, f^2$ имеем

$$f^2 = (up_1 + vp_2)^2 - \rho \approx -tuv - \rho,$$

$$2(p_1 f) = 2p_1(up_1 + vp_2) \approx -tv,$$

$$2(p_2 f) \approx -tu.$$

Тогда

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|t|} \int \frac{d\rho}{\rho + tuv - i0} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}. \quad (129,20)$$

Согласно условиям (129,18) интегрирование по $d\rho$ производится в пределах от 0 до меньшего из $|tv|$ или $|tu|$ и дает

$$\int_0^{\min\{|tu|, |tv|\}} \frac{d\rho}{\rho + tuv - i0} = \ln \min \left\{ \frac{1}{|u|}, \frac{1}{|v|} \right\} + \begin{cases} i\pi & \text{при } tuv < 0, \\ 0 & \text{при } tuv > 0. \end{cases} \quad (129,21)$$

Логарифмическое же интегрирование по dv производится в пределах от -1 до $-|p_1^2/t|$ и от $|p_1^2/t|$ до 1 (и аналогично по du). При подстановке (129,21) в (129,20) интеграл по $du dv$ от первого члена обращается в нуль ввиду нечетности подинтегральной функции. Интегрирование же второго члена производится по интервалам значений u и v одинакового (при $t < 0$) или различного (при $t > 0$) знака. В обоих случаях области $v > 0$ и $v < 0$ дают (после интегрирования по du) одинаковый вклад, и в результате находим

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t} 2 \int \frac{du}{u} \int \frac{dv}{v} = \frac{i\pi^2}{t} \ln \left| \frac{t}{p_1^2} \right| \ln \left| \frac{t}{p_2^2} \right| \quad (129,22)$$

(знак совпадает со знаком t).

Наконец, подставив в (129,11), находим окончательно

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{\alpha}{2\pi} \gamma^{\mu} \ln \left| \frac{q^2}{p_1^2} \right| \ln \left| \frac{q^2}{p_2^2} \right|, \quad (129,23)$$

$$|q^2| \gg |p_1^2|, |p_2^2| \gg m^2.$$

Случай физических электронных концов

Пусть теперь импульсы p_1, p_2 отвечают реальным электронам, так что

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2. \quad (129,24)$$

В этом случае существенна область интегрирования

$$\begin{aligned} 0 < \rho \ll |tu|, |tv|, \\ 0 < |v|, |u| \ll 1. \end{aligned} \quad (129,25)$$

Поскольку $p_1^2 - m^2 = p_2^2 - m^2 = 0$, то, пренебрегая p_1^2 и p_2^2 по сравнению с $p_1 f$ или $p_2 f$, снова приведем интеграл (129,9) к виду (129,19). Для устранения появляющейся в этом случае инфракрасной расходимости надо, однако, ввести еще в фотонный пропагатор конечную массу фотона $\lambda \ll m$ (ср. § 114):

$$I_1 = \int \frac{d^4 f}{2(p_1 f) 2(p_2 f) (f^2 - \lambda^2 + i0)}. \quad (129,26)$$

Далее, имеем теперь

$$\begin{aligned} f^2 &\approx -tuv - \rho, \\ 2p_1 f &\approx -tv + 2m^2 u, \\ 2p_2 f &\approx -tu + 2m^2 v, \end{aligned}$$

так что

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|t|} \int \frac{d\rho}{\rho + tuv + \lambda^2 - i0} \frac{du}{u - \tau v} \frac{dv}{v - \tau u}, \quad (129,27)$$

где $\tau = 2m^2/t \ll 1$.

После интегрирования по $d\rho$ (аналогичного (129,21)) находим

$$I_1 = -\frac{i\pi^2}{2|t|} \int \int \frac{du}{u - \tau v} \frac{dv}{v - \tau u},$$

причем интегрирование производится при условии $tuv + \lambda^2 < 0$. Области $v > 0$ и $v < 0$ снова дают одинаковый вклад, и после

интегрирования по du находим

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{t} \int_0^1 dv \int_{\delta/v}^1 \frac{du}{(u - \tau v)(v - \tau u)} =$$

$$= \frac{i\pi^2}{t} \int_0^1 \ln \frac{\tau\delta - v^2}{(\delta - \tau v^2)(\tau - v)} \frac{dv}{v}, \quad (129,28)$$

где $\delta = \lambda^2/t \ll \tau$ и учтено, что $\tau \ll 1$.

В интеграле (129,28) две области значений v приводят к дважды логарифмическим выражениям:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad &\tau \ll v \ll 1, \\ \text{II)} \quad &\sqrt{\tau\delta} \ll v \ll \sqrt{\delta/\tau}. \end{aligned}$$

Делая в каждой области соответствующие пренебрежения, получим

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t} \left(\ln^2 \frac{|t|}{m^2} + 4 \ln \frac{|t|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right), \quad (129,29)$$

причем первый член происходит от области I, а второй — от области II.

Наконец, подставив в (129,11), находим окончательно

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{\alpha}{4\pi} \gamma^{\mu} \left(\ln^2 \frac{|q^2|}{m^2} + 4 \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right), \quad (129,30)$$

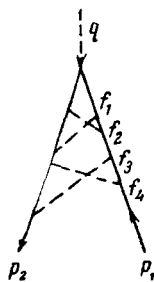
$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2,$$

что совпадает с (114,21).

§ 130. Дважды логарифмическая асимптотика вершинного оператора

Когда вычисленные в предыдущем параграфе поправки $\Gamma^{(1)}$ достигают порядка 1, вычисление вершинного оператора требует суммирования всей бесконечной последовательности дважды логарифмических членов всех степеней по α . Решение этой задачи оказывается возможным благодаря тому, что такие члены возникают только от диаграмм определенного типа, а вклады диаграмм различного порядка оказываются связанными друг с другом простыми соотношениями.

Именно, дважды логарифмические члены возникают, как мы убедимся ниже, от всех диаграмм вида



(130,1)

и т. п., в которых каждая из фотонных линий соединяет правую и левую электронные линии; при этом они могут любым образом пересекаться друг с другом.

Перенумеруем фотонные импульсы f_1, f_2, \dots в порядке следования, скажем, правых концов их линий. Тогда различные диаграммы одинакового порядка будут отличаться друг от друга перестановкой левых концов фотонных линий. В каждом интеграле Фейнмана производим пренебрежения в числителе и знаменателе, подобные тем, которые были сделаны в интеграле (129,5); после этого числитель преобразуем тем же способом, что и при выводе (129,11). В результате сумма всех диаграмм с n фотонными линиями, составляющая член $\sim \alpha^n$ в Γ , представится в виде

$$\Gamma^\mu(n) = \gamma^\mu \left(\frac{i\alpha}{2\pi^3} t \right)^n I_n, \quad (130,2)$$

$$I_n = \sum_{\text{пер } 2} \int \frac{d^4 f_1 \dots d^4 f_n}{2^2 (p_1 f_1)^2 (p_1 f_1 + p_1 f_2) \dots 2 (p_1 f_1 + \dots + p_1 f_n)^2 (p_2 f_1) \dots 2 (p_2 f_1 + \dots + p_2 f_n)^2 f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2}, \quad (130,3)$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов у импульсов f_k в произведениях $p_2 f_k$ (члены $i0$ и λ^2 в знаменателях для краткости не выписываем).

Очевидно, что если переставить в сумме (130,3) каким-либо образом индексы у множителей f_k в произведениях $p_1 f_k$, то это сведется лишь к переобозначению импульсов и потому не изменит значения I_n . Поэтому можно распространить суммирование в (130,3) по всем перестановкам множителей f_k как в произведениях $p_2 f_k$, так и в $p_1 f_k$, разделив после этого результат на $n!$:

$$\sum_{\text{пер } 2} \rightarrow \frac{1}{n!} \sum_{\text{пер } 1} \sum_{\text{пер } 2}$$

Воспользуемся теперь важной формулой

$$\sum_{\text{пер}} \frac{1}{a_1 (a_1 + a_2) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} = \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}, \quad (130,4)$$

где сумма берется по перестановкам индексов $1, 2, \dots, n$ ¹⁾. Двукратное применение этой формулы сводит сумму интегралов к произведению n одинаковых интегралов вида (129,19) (или (129,26)), так что

$$I_n = \frac{1}{n!} I_1^n. \quad (130,5)$$

Подставив это в (130,2) и просуммировав $\Gamma(n)$ по всем $n = 0, 1, 2, \dots$, получим окончательно

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1; q) = \gamma^\mu \exp \left(\frac{ie^2}{2\pi^3} t I_1 \right). \quad (130,6)$$

В частности, подставив сюда I_1 из (129,22), получим дважды логарифмическую асимптотику вершинного оператора с виртуальными электронными концами

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1; q) = \gamma^\mu \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \left| \frac{q^2}{p_1^2} \right| \ln \left| \frac{q^2}{p_2^2} \right| \right\}, \quad (130,7)$$

$$|q^2| \gg |p_1^2|, \quad |p_2^2| \gg m^2$$

(В. В. Судаков, 1956).

Подставив же I_1 из (129,29), найдем асимптотику для вершинного оператора в случае реальных электронных концов:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1; q) = \gamma^\mu \exp \left\{ -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\ln^2 \frac{|q^2|}{m^2} + 4 \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right) \right\}, \quad (130,8)$$

$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2.$$

Множитель, отличающий это Γ^μ от его невозмущенного значения γ^μ , определяет собой также и отличие амплитуды рассеяния электрона во внешнем поле от ее борновского значения. Поэтому сечение рассеяния

$$d\sigma = d\sigma_B \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2\pi} \left(\ln^2 \frac{|q^2|}{m^2} + 4 \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right) \right\}. \quad (130,9)$$

Для устранения инфракрасной расходимости надо, однако, еще умножить это выражение на сумму вероятностей испускания различного числа мягких фотонов с энергией, не превышающей

¹⁾ При $n = 2$ эта формула очевидна, а ее обобщение легко достигается индукцией от n к $n+1$.

Заметим, что мы, по существу, уже пользовались факторизацией согласно этой формуле при выводе формулы (95,14) для вероятности испускания мягких фотонов.

некоторого малого ω_{\max} , т. е. на величину (см. (119,2))

$$1 + \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_{\omega} + \frac{1}{2!} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_{\omega_1} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_{\omega_2} + \dots \approx \exp \left\{ \int_0^{\omega_{\max}} d\omega_{\omega} \right\}. \quad (130,10)$$

Интеграл в экспоненте берем из (117,14) (выражение, стоящее множителем при $d\sigma_{\text{уп}}$) и в результате находим окончательно следующую асимптотическую формулу для сечения рассеяния электрона с энергией ε при большой передаче импульса:

$$d\sigma = d\sigma_B \exp \left\{ -\frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{\varepsilon}{\omega_{\max}} \right\}, \quad (130,11)$$

$$|q^2| \gg m^2, \quad \frac{\alpha}{2\pi} \ln^2 \frac{\varepsilon}{m} \sim 1$$

(А. А. Абрикосов, 1956). Первый (по α) член разложения этого выражения совпадает, естественно, с формулой (119,12).

§ 131. Дважды логарифмическая асимптотика амплитуды рассеяния электрона на мюоне

Дважды логарифмические члены в асимптотических выражениях амплитуд возникают не только для рассеяния электрона во внешнем поле, но и для двухчастичных процессов рассеяния.

В качестве примера этого рода рассмотрим рассеяние электрона на отрицательном мюоне, причем ограничимся случаем рассеяния назад, т. е. на угол $\theta = \pi$ (В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, Г. В. Фролов, 1967). Этот процесс является простейшим с двух точек зрения. Во-первых, ввиду нетождественности обеих частиц отсутствуют обменные диаграммы. Во-вторых, при рассеянии назад сильно подавлено излучение мягких фотонов, в результате чего не возникает инфракрасной расходимости. Действительно, согласно (95,8) сечение испускания мягких фотонов

$$d\sigma = \alpha \left[\left(\frac{v'_e}{1-v'_en} + \frac{v'_\mu}{1-v'_\mu n} - \frac{v_e}{1-v_en} - \frac{v_\mu}{1-v_\mu n} \right) n \right]^2 \frac{d\omega d\omega_n}{4\pi^2\omega} d\sigma_{\text{уп}}, \quad (131,1)$$

где v_e , v_μ и v'_e , v'_μ — скорости частиц до и после столкновения. Но в ультрарелятивистском случае равенство импульсов равнозначно равенству скоростей, и с этой точностью имеем в системе центра инерции при рассеянии назад

$$v_e = -v_\mu = -v'_e = v'_\mu.$$

В результате выражение (131,1) обращается в нуль.

Если рассматриваемый процесс рассеяния отвечает s -каналу реакции, то в t -канале он переходит в процесс превращения электрон-позитронной пары в пару $\mu^+\mu^-$. В этом канале условие $\theta = \pi$ означает, что совпадают направления движения e^- и μ^- (и e^+ и μ^+). Подавление тормозного излучения в этом канале имеет в особенности наглядное происхождение, так как направление движения заряда каждого знака вообще не меняется.

Взаимное сокращение главных членов в сечении излучения приводит к тому, что в его асимптотике не возникают дважды логарифмические поправки. Соответственно не возникает (с той же дважды логарифмической точностью) инфракрасной расходимости и при интегрировании по импульсам виртуальных фотонов в амплитуде рассеяния.

Если описывать процесс с помощью инвариантных переменных

$$s = (p_e + p_\mu)^2, \quad t = (p_e - p'_e)^2, \quad u = (p_e - p'_\mu)^2,$$

то рассеянию назад в ультрарелятивистском случае будут отвечать значения

$$s = -t \gg m_\mu^2, \quad u = 0. \quad (131,2)$$

В первом (по α) приближении теории возмущений рассеяние электрона на мюоне описывается диаграммой

$$(131,3)$$

Соответствующая амплитуда:

$$M_{fi}^{(1)} = \frac{4\pi\alpha}{t} (\bar{u}^{(\mu)'} \gamma^\nu u^{(\mu)}) (\bar{u}^{(e)'} \gamma_\nu u^{(e)}). \quad (131,4)$$

Переход к предельному случаю (131,2) в этом выражении осуществляется заменой матричного 4-вектора γ^ν его «проекцией» γ_\perp^ν на плоскость, нормальную плоскости p_e , p'_e (или, что то же, плоскости p_μ , p'_μ , поскольку при ультрарелятивистском рассеянии назад $p_e \approx p'_\mu$, $p'_e \approx p_\mu$). Действительно, параллельными плоскости p_e , p'_e составляющими являются матрицы

$$\frac{1}{V^s} (\hat{p}_e + \hat{p}'_e), \quad \frac{1}{V^s} (\hat{p}_e - \hat{p}'_e)$$

(первая совпадает с γ^0 , а вторая равна $n_e \gamma$, где n_e — орт направления p_e). Используя уравнения Дирака для биспиноров $u^{(e)}$

и $u^{(\mu)}$, найдем, что

$$(\bar{u}^{(\mu)'} \gamma_{\parallel}^{\nu} u^{(\mu)}) (\bar{u}^{(e)'} \gamma_{\parallel}^{\nu} u^{(e)}) \sim \frac{1}{s},$$

и потому эти члены могут быть опущены.

В следующем приближении добавляется диаграмма

$$(131,5)$$

и диаграмма с «перекрещенными» фотонными линиями, которую удобно изобразить в виде, отличающемся от (131,5) лишь направлением одной из сплошных линий:

$$(131,6)$$

Исследование соответствующих интегралов показывает, что в обеих диаграммах возникают дважды логарифмические вклады от областей «мягких» виртуальных фотонов:

$$|(f - p_e)^2| \ll m_e^2 \quad \text{или} \quad |(f - p'_e)^2| \ll m_e^2.$$

Эти вклады связаны с инфракрасными расходимостями интегралов и, согласно сказанному выше, в данном случае заведомо должны взаимно сокращаться. В диаграмме (131,6) имеется, однако, дважды логарифмический вклад еще и от области больших импульсов: $|f^2| \gg m_{\mu}^2$. Именно этот вклад и должен быть вычислен.

Диаграмме (131,6) отвечает интеграл

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{i\alpha^2}{\pi^2} \int \frac{(\bar{u}^{(e)'} \gamma^{\nu} (\hat{f} + m_e) \gamma_{\lambda} u^{(e)}) (\bar{u}^{(\mu)'} \gamma^{\lambda} (\hat{f} + m_{\mu}) \gamma_{\nu} u^{(\mu)})}{(p'_e - f)^2 (f^2 - m_e^2) (f^2 - m_{\mu}^2) (p_e - f)^2} d^4f \quad (131,7)$$

(где уже учтено, что $p_e \approx p'_{\mu}$). Положим снова

$$f = up_e + vp'_e + f_{\perp} \quad (131,8)$$

(ср. (129,13)). Дважды логарифмический вклад возникает от области, определяемой неравенствами

$$|su|, |sv| \gg \rho \gg m_{\mu}^2, \quad \frac{m_{\mu}^2}{s} \ll |u|, |v| \ll 1, \quad (131,9)$$

где $\rho = -f_{\perp}^2$. 4-вектор f_{\perp} определен так, что $f_{\perp} p_e = f_{\perp} p'_{\mu} = 0$; в данном случае (рассеяние назад) отсюда следует, что в системе центра инерции $f_{\perp}^0 = 0$, так что $\rho = f_{\perp}^2$.

В числителе интеграла (131,7) можно преобратить m_e , m_{μ} , а также всеми членами с u или v ; множители u или v в числителе сократили бы соответствующие полюсы в знаменателе (см. ниже), в результате чего не возникли бы требуемые квадраты логарифмов. Заметив, что

$$(p'_e - f)^2 \approx tu \approx -su, \quad (p_e - f)^2 \approx -sv, \quad f^2 \approx suv - \rho,$$

и преобразуя элемент интегрирования d^4f согласно (129,16), переписываем интеграл (131,7) в виде

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{i\alpha^2}{2\pi^2} \int \frac{(\bar{u}^{(e)'} \gamma^{\nu} \hat{f}_{\perp} \gamma_{\lambda} u^{(e)}) (\bar{u}^{(\mu)'} \gamma^{\lambda} \hat{f}_{\perp} \gamma_{\nu} u^{(\mu)})}{su \cdot sv (suv - \rho + i0)^2} s du dv d^2f_{\perp}.$$

Числитель подынтегрального выражения преобразуется далее путем усреднения по направлениям f_{\perp} и замены (по тем же причинам, что и в (131,4)) γ^{ν} , γ^{λ} на γ_{\perp}^{ν} , γ_{\perp}^{λ} . После простых преобразований получим

$$M_{fi}^{(2)} = M_{fi}^{(1)} J^{(1)}, \quad (131,10)$$

где

$$J^{(1)} = -i \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \frac{\rho du dv d\rho}{uv (suv - \rho + i0)^2}.$$

Наконец, заменив в числителе тождественно $\rho = (\rho - suv) + suv$, можно опустить второй член, который сократил бы простые полюсы и тем самым не дал бы дважды логарифмического вклада. Таким образом,

$$J^{(1)} = -\frac{i\alpha}{4\pi^2} \int \frac{du dv d\rho}{uv (\rho - suv - i0)}. \quad (131,11)$$

Этот интеграл по форме совпадает с (129,20), поэтому интегрирование по $d\rho$ производится тем же способом. Однако поскольку теперь $\rho \gg m_{\mu}^2$, то возникает условие $suv \gg m_{\mu}^2$ (вместо $suv > 0$). В результате находим

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{du dv}{uv}, \quad (131,12)$$

причем область интегрирования ограничена неравенствами

$$\frac{m_\mu^2}{s} < u, v < 1, \quad suv > m_\mu^2$$

(при вычислении с логарифмической точностью сильные неравенства \gg заменяются простыми неравенствами $>$). Прямое вычисление дает

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{4\pi} \ln^2 \frac{s}{m_\mu^2}. \quad (131,13)$$

В более высоких приближениях теории возмущений интересные нас вклады $\sim \alpha^n \ln^{2n} s$ получаются от аналогичных (131,6) диаграмм «лестничного» типа с большим числом «перекладок». Поэтому полная дважды логарифмическая асимптотика амплитуды рассеяния дается бесконечной суммой¹⁾

The diagram shows the sum of three ladder diagrams. The first diagram has two rungs, with external momenta \$p'_a, p_a\$ on top and \$p_\mu, p'_\mu\$ on bottom. The second diagram has three rungs. The third diagram has four rungs. Each diagram is connected to the next by a plus sign.

$$iM_{fi} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots \quad (131,14)$$

Для установления общего вида членов этой суммы рассмотрим еще диаграмму третьего приближения (третий член ряда (131,14)). Соответствующий ей интеграл можно привести к виду

$$M_{fi}^{(3)} = M_{fi}^{(1)} J^{(2)}, \quad J^2 = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1 dv_1 du_2 dv_2}{u_1 v_1 (u_1 + u_2) (v_1 + v_2)} \quad (131,15)$$

с областью интегрирования

$$\frac{m_\mu^2}{s} < u_{1,2}, v_{1,2} < 1, \quad su_1 v_1, su_2 v_2 > m_\mu^2.$$

Дважды логарифмическую часть этого интеграла можно выделить, наложив на переменные интегрирования еще условия²⁾

$$v_2 \gg v_1, \quad u_2 \gg u_1. \quad (131,16)$$

Тогда

$$J^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1 dv_1 du_2 dv_2}{u_1 u_2 v_1 v_2} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2,$$

¹⁾ Этот ряд суммируется к уравнению Бете — Солпитера (§ 122), решая которое можно найти M_{fi} . Более удобен, однако, излагаемый ниже способ вычисления, в котором производится упрощение каждого члена до суммирования.

²⁾ Этот способ можно было бы применить и для вычисления интеграла (130,3).

где

$$\xi_i = \ln \frac{su_i}{m_\mu^2}, \quad \eta_i = -\ln v_i,$$

а область интегрирования определена неравенствами

$$\xi_i > \eta_i, \quad \xi_2 > \eta_2, \quad \sigma > \xi_2, \quad \eta_2 > 0, \quad \sigma = \ln \frac{s}{m_\mu^2}.$$

Аналогичным образом n -й член ряда может быть представлен в виде $M_{fi}^{(n)} = M_{fi}^{(1)} J^{(n)}$, где

$$J^{(n)}(\sigma) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \int d\xi_1 d\eta_1 \dots d\xi_n d\eta_n, \quad (131,17)$$

с областью интегрирования

$$\xi_i > \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \sigma > \xi_n, \quad \eta_n > 0. \quad (131,18)$$

Полная амплитуда рассеяния равна

$$M_{fi} = M_{fi}^{(1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J^{(n)}(\sigma) \right]. \quad (131,19)$$

Для вычисления этой суммы введем теперь вспомогательные функции $A^{(n)}(\xi, \eta)$, которые даются теми же интегралами (131,17), но с областями интегрирования

$$\xi_i > \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \xi > \xi_n > 0, \quad \eta > \eta_n > 0 \quad (131,20)$$

(различные пределы интегрирования по ξ_n и η_n вместо одинаковых в (131,18)). Очевидно, что $M_{fi} = M_{fi}^{(1)} A(\sigma, \sigma)$, где

$$A(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(\xi, \eta), \quad A^{(0)} = 1. \quad (131,21)$$

Из определения функций $A^{(n)}(\xi, \eta)$ видно, что они удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$A^{(n)}(\xi, \eta) = \frac{\alpha}{2\pi} \int d\xi_1 d\eta_1 A^{(n-1)}(\xi_1, \eta_1),$$

а просуммировав эти равенства по n (от 1 до ∞), найдем интегральное уравнение, определяющее функцию $A(\xi, \eta)$:

$$A(\xi, \eta) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int A(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1, \quad (131,22)$$

$$\xi_1 > \eta_1, \quad \xi > \xi_1 > 0, \quad \eta > \eta_1 > 0.$$

Для дальнейшего будет достаточно рассмотреть функцию $A(\xi, \eta)$ в области $\xi > \eta$. Тогда уравнение (131,22) можно

записать в виде

$$A(\xi, \eta) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\eta \int_{\eta_1}^\xi A(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1. \quad (131,23)$$

Дифференцируя это равенство по η , имеем

$$\frac{\partial A(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\eta}^\xi A(\xi_1, \eta) d\xi_1, \quad (131,24)$$

а дифференцируя затем еще и по ξ , находим для $A(\xi, \eta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\alpha}{2\pi} A = 0. \quad (131,25)$$

Это уравнение должно быть решено с граничными условиями

$$A(\xi, 0) = 1, \quad \left. \frac{\partial A}{\partial \eta} \right|_{\xi=\eta} = 0, \quad (131,26)$$

непосредственно следующими из (131, 23—24).

Решение можно получить с помощью преобразования Лапласа по переменной ξ :

$$A(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\eta \xi} Q(p, \eta) dp, \quad (131,27)$$

где контур C в плоскости комплексного p — замкнутая кривая, охватывающая точку $p = 0$. Подставив (131,27) в уравнение (131, 25) и приравняв нулю подынтегральное выражение, получаем

$$p \frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{\alpha}{2\pi} Q, \quad Q = \varphi(p) e^{\frac{\alpha \eta}{2\pi p}},$$

где $\varphi(p)$ — произвольная функция. Первое из граничных условий (131,26) дает теперь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\eta \xi} \varphi(p) dp = 1,$$

откуда следует, что

$$\varphi(p) = \frac{1}{p} + \psi(p),$$

где $\psi(p)$ — аналитическая функция, не имеющая особенностей внутри контура C . Второму же условию (131,26) можно удовлетворить, положив $\psi(p) = -2\pi p/\alpha$; действительно, тогда

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \eta} \right|_{\xi=\eta} = -\frac{1}{\xi} \int_C \frac{d}{dp} e^{\xi \left(p + \frac{\alpha}{2\pi p} \right)} dp = 0.$$

Собирая полученные выражения и положив $\xi = \eta = \sigma$, находим

$$A(\sigma, \sigma) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi}{\alpha \sigma} \int_C p \frac{d}{dp} e^{\sigma \left(p + \frac{\alpha}{2\pi p} \right)} dp.$$

Наконец, проинтегрировав по частям и воспользовавшись известной формулой

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{z}{2}} \left(p + \frac{1}{p} \right) dp$$

($I_1(z) = -iJ_1(iz)$ — функция Бесселя мнимого аргумента), получим окончательно для амплитуды рассеяния

$$M_{fi} = M_{fi}^{(1)} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha \sigma^2}} I_1 \left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \sigma \right). \quad (131,28)$$

Сечение же рассеяния (на угол $\theta = \pi$) соответственно равно

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} \frac{2\pi}{\alpha \ln^2(s/m_\mu^2)} I_1^2 \left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \ln \frac{s}{m_\mu^2} \right), \quad (131,29)$$

где

$$d\sigma^{(1)} = \frac{2\pi\alpha^2}{s^2} dt$$

есть сечение в борновском приближении в ультрарелятивистском случае (см. задачу 6, § 82)¹⁾.

¹⁾ Укажем несколько дополнительных литературных ссылок по дважды логарифмическим асимптотикам двухчастичных процессов рассеяния: В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Г. В. Фролов, ЖЭТФ 51, 1093 (1966) (рассеяние фотона на электроном назад); В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, Г. В. Фролов, ЯФ 6, 361 (1967) (электрон-позитронное рассеяние назад); В. Г. Горшков, ЯФ 6, 579 (1967) (процессы рассеяния на произвольные углы).

ГЛАВА XIV

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ АДРОНОВ

§ 132. Изомультимплеты

Если частицы описываются вещественным (эрмитовым) ψ -полем, то импульс p и проекция спина σ образуют полный набор квантовых чисел, определяющих состояние свободной частицы. Каждый уровень энергии при этом вырожден по направлениям p и $(2s + 1)$ -кратно по значениям σ .

Комплексность поля можно воспринимать как наличие дополнительного вырождения: одинаковой энергией (при заданном p) обладают два состояния поля, отличающиеся значениями квантового числа $Q = \pm 1$ (частица и античастица).

Опыт показывает, однако, что существует еще и другой тип вырождения, не связанный (в противоположность перечисленным вырождениям) непосредственно со свойствами симметрии пространства и времени: оказываются почти одинаковыми массы частиц, обладающих различными электрическими зарядами и не являющихся по отношению друг к другу частицей и античастицей. Такие частицы составляют, как говорят, *изотопический мультиплет*, или *изомультимплет*¹⁾.

Физическая природа этого вырождения в настоящее время еще не известна. Ясно лишь, что лежащее в ее основе свойство симметрии относится к определенной категории взаимодействий — к сильным взаимодействиям (в этом смысле можно говорить о *динамической симметрии*). Изомультимплетность свойственна лишь частицам, способным к сильным взаимодействиям, — так называемым *адронам*²⁾, и является одним из проявлений так называемой *изотопической инвариантности* этих взаимодействий (более точная формулировка этого свойства будет дана ниже).

Хотя свойства компонент изомультимплета в отношении сильных взаимодействий тождественны, их электромагнитные свойства, разумеется, различны. В связи с этим вырождение в изомультимплете не является вполне строгим: массы входящих в него частиц совпадают лишь приближенно; надо думать, что небольшие различия в этих массах имеют электромагнитное происхождение.

Рассмотрим две частицы, составляющие изотопический дублет; таковы, например, два нуклона — протон и нейтрон, о которых мы и будем говорить для определенности¹⁾. Если пренебречь электромагнитным взаимодействием («выключить» его), то $|p\rangle$ и $|n\rangle$ — два «зарядовых» состояния свободного нуклона, отличающихся только одним квантовым числом (электрическим зарядом $Z = 1, 0$), не играющим роли в сильных взаимодействиях. Такими же свойствами в отношении этих взаимодействий будет обладать и любая суперпозиция состояний

$$\psi^1 |p\rangle + \psi^2 |n\rangle. \quad (132,1)$$

Совокупность двух величин $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$ называют *изоспинором*. Протону и нейтрону отвечают изоспиноры

$$p: \psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n: \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Равноправие различных суперпозиций означает, что изоспинор можно подвергнуть преобразованию $\psi \rightarrow V\psi$, где V — двухрядная (2×2) матрица. Преобразования должны сохранять нормировку и ортогональность двух линейно независимых состояний. Это значит, что матрица V должна быть унитарной.

Из унитарности V следует, что определитель матрицы равен по модулю единице, т. е.

$$|V| = e^{2i\alpha}.$$

Поэтому каждую матрицу V можно представить в виде $V = Ue^{i\alpha}$, где U — унитарная матрица с единичным определителем. Умножение ψ на общий фазовый множитель не имеет, очевидно, отношения к свойству изотопической инвариантности. Поэтому характерными для последней являются лишь преобразования

$$\psi \rightarrow U\psi,$$

где

$$UU^+ = 1, \quad |U| = 1. \quad (132,2)$$

¹⁾ Принятый в литературе термин «изотопический» в данной связи не вполне удачен, так как речь идет о свойствах частиц с одинаковыми массами («изобарических»), а не с одинаковыми зарядами.

²⁾ От греческого слова «хадрос», означающего «крупный», «массивный».

¹⁾ Об этом изодублете уже шла речь в III, § 115. Здесь мы рассматриваем вопрос об изомультимплетности с несколько более общей точки зрения.

Но в чисто математическом отношении эти преобразования совпадают с бинарными преобразованиями, согласно которым преобразуются контравариантные компоненты обычного (трехмерного) спинора при поворотах системы координат¹⁾. Поэтому алгебра изоспиноров формально совпадает с обычной спинорной алгеброй. В этом смысле изотопическому дублету можно приписать *изотопический спин*, или *изоспин*, $T = 1/2$, а преобразования (132,2) рассматривать формально как вращения в фиктивном «изопространстве». Необходимо, однако, подчеркнуть, что такое рассмотрение является всего лишь способом выражаться — удобным ввиду привычности понятий обычной спинорной алгебры. Первичным понятием являются, разумеется, не вращения в воображаемом изопространстве, а унитарные преобразования (132,1), отражающие вырожденность состояний нуклона.

Операторы компонент изоспина $T = 1/2$, как и обычного спина, выражаются через матрицы Паули, которые мы обозначим в этой связи через τ_1, τ_2, τ_3 (вместо $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$):

$$T_1 = \frac{1}{2} \tau_1, \quad T_2 = \frac{1}{2} \tau_2, \quad T_3 = \frac{1}{2} \tau_3. \quad (132,3)$$

Такой выбор осей в изопространстве означает, что мы условно считаем протон и нейтрон собственными состояниями оператора T_3 , отвечающими соответственно собственным значениям $T_3 = +1/2$ и $T_3 = -1/2$. Это квантовое число (*проекция изоспина*) и отличает протон от нейтрона. Поэтому оно выполняет ту же функцию, что и электрический заряд Z , но более симметричным образом. Очевидно, что

$$Z = \frac{1}{2} + T_3. \quad (132,4)$$

Введем также операторы

$$T_+ = T_1 + iT_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_- = T_1 - iT_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (132,5)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} T_+ |n\rangle &= |p\rangle, & T_+ |p\rangle &= 0, \\ T_- |n\rangle &= 0, & T_- |p\rangle &= |n\rangle. \end{aligned} \quad (132,6)$$

Наряду с парой p, n образуют изодублет антинуклоны \bar{p} и \bar{n} . Волновая функция античастицы является величиной, комплексно-сопряженной по отношению к волновой функции частицы. Если представить состояние антинуклона в виде

¹⁾ Группу бинарных преобразований называют также группой $SU(2)$; это есть совокупность унитарных унимодулярных ($|U| = 1$) преобразований двумерного линейного комплексного пространства.

суперпозиции

$$\varphi_1 |\bar{p}\rangle + \varphi_2 |\bar{n}\rangle, \quad (132,7)$$

то величины φ_1, φ_2 преобразуются, следовательно, как комплексно-сопряженные от коэффициентов ψ^1, ψ^2 в суперпозиции (132,1); другими словами, они составляют ковариантный изоспинор. Переписав (132,7) с помощью контравариантных компонент изоспинора, получим

$$\varphi^1 |\bar{n}\rangle - \varphi^2 |\bar{p}\rangle. \quad (132,8)$$

Сами антипротону и антинейтрону отвечают изоспиноры

$$\bar{p}: \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{n}: \varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Антипротону отвечает собственное значение $T_3 = -1/2$, а антинейтрону: $T_3 = +1/2$. Другими словами, заряд антинуклона

$$Z = -\frac{1}{2} + T_3. \quad (132,9)$$

Изомультиплеты более высоких кратностей описываются симметричными изоспинорами высших рангов: изоспинору ранга $n = 2T$ отвечает изомультиплет из $2T + 1$ частиц, которым приписывается изоспин T . В пределах каждого изомультиплета частицы различаются значениями одного аддитивного квантового числа T_3 . Эти значения ставятся в определенное соответствие с электрическим зарядом частицы (см. § 133). Сложение изоспинов частиц, образующих сложную систему, производится по обычному правилу сложения моментов.

Изотопическая инвариантность сильных взаимодействий может быть сформулирована как инвариантность по отношению к произвольным вращениям в изопространстве. Другими словами, взаимодействия в системе адронов с заданным полным изоспином T не зависят от значения суммарной проекции T_3 . В терминах амплитуд рассеяния это значит, что S -оператор — изоскаляр, так что его матричные элементы

$$\langle T'T'_3 | S | TT'_3 \rangle = S_T \delta_{TT'} \delta_{T_3 T'_3}, \quad (132,10)$$

где S_T не зависит от T_3 .

§ 133. Гиперзаряд

В отсутствие последовательной теории элементарных частиц их классификация в значительной степени может основываться лишь на опытных данных. Анализ имеющегося эмпирического материала позволяет установить ряд законов сохранения, определяющих правила отбора, разрешающие или запрещающие те

или иные мыслимые реакции между частицами. Эти законы сохранения формулируются с помощью специальных числовых характеристик (квантовых чисел), которые приписываются различным типам частиц.

К такого рода законам относится, прежде всего, закон сохранения электрического заряда, выражающегося для каждой частицы целым числом Q элементарных зарядов e . Этот, наиболее универсальный, закон является точным: он соблюдается при всех взаимодействиях любых частиц.

Уже этот закон объясняет устойчивость электрона: обладая наименьшей массой среди всех заряженных частиц, он не может самопроизвольно распасться на какие-либо другие частицы. Но сохранение заряда не запрещает превращения протона в позитрон с излучением фотона. Протон обретет устойчивость, если приписать ему, кроме заряда, еще одну сохраняющуюся величину, отсутствующую у более легких частиц. Эту величину называют *барионным числом*; будем обозначать ее через B . Для протона условно полагают $B = 1$; антипротону надо тогда приписать $B = -1$ в соответствии с допустимостью взаимной аннигиляции протона и антипротона.

Все адроны делятся на две группы в зависимости от того, равно или не равно нулю их барионное число¹⁾. Адроны с $B \neq 0$ называют *барионами*, а адроны с $B = 0$ — *мезонами*.

Закон сохранения барионного числа (т. е. суммы барионных чисел частиц, образующих замкнутую систему) тоже является точным и не нарушается никакими взаимодействиями. Дальнейшая классификация адронов возможна уже только на основе приближений, связанных с разделением взаимодействий на сильное, электромагнитное и слабое.

Если рассматривать процессы, в которых можно пренебречь слабым взаимодействием, то соблюдаются законы сохранения пространственной четности и зарядовой четности. Кроме того, адроны будут подчиняться еще двум законам сохранения. Во-первых, только слабое взаимодействие способно изменить электрический заряд системы адронов, передав его лептонам. Поэтому после «выключения» слабого взаимодействия сохраняется не только полный заряд замкнутой системы Q , но и по отдельности заряд лептонов и заряд адронов; обозначим последний через Z .

Во-вторых, существуют такие адроны (*странные частицы*), которые становятся стабильными по выключении слабого взаимодействия, хотя все другие законы сохранения не запрещают их распада. Эта устойчивость описывается путем введения еще

¹⁾ Барионное число равно нулю также и для всех частиц, не способных к сильному взаимодействию (лептоны).

одного сохраняющегося аддитивного квантового числа; оно называется *гиперзарядом* и обозначается Y (разность $Y - B = S$ называется *странностью*, а частицы с $S \neq 0$ — *странными частицами*). Каждому из известных в настоящее время адронов можно приписать определенное значение Y так, чтобы сохранение суммарного гиперзаряда вместе с другими законами сохранения объясняло бы разрешенность или запрет реакций, обусловленных сильным или электромагнитным взаимодействием. Все компоненты одного и того же изомультиплета имеют одинаковое Y . Частице и античастице должны, очевидно, приписываться гиперзаряды противоположных знаков.

Существует связь между гиперзарядом частицы и ее изоспином.

Рассмотрим сначала изомультиплеты нестранных частиц. Таковыми являются, прежде всего, изодублеты нуклонов и антинуклонов. Приписав нуклонам барионное число $B = 1$, а антинуклонам $B = -1$, мы можем записать связь между их зарядом и проекцией изоспина T_3 в виде

$$Z = \frac{B}{2} + T_3$$

(ср. (132,4) и (132,9)) или, так как $B = Y$,

$$Z = \frac{Y}{2} + T_3. \quad (133,1)$$

Ввиду аддитивности всех чисел Z , Y , T_3 это соотношение справедливо и для любой системы нуклонов и антинуклонов. Более того, поскольку в нем не содержится никаких других характеристик частиц, оно тем самым будет относиться и ко всякому вообще изомультиплету нестранных частиц.

По своим изотопическим и зарядовым свойствам странная частица с заданными значениями Z , T , B , Y ($B \neq Y$) эквивалентна системе, составленной из нестранных адрона с Z , T , Y , и $|B - Y|$ изоскалярных ($T = 0$) адронов с $Z = Y = 0$, $B = \pm 1$ (такие частицы фактически существуют — это Λ -гиперон или его античастица $\bar{\Lambda}$, см. § 134). Поскольку при образовании такой системы значения Z , Y , T_3 не меняются, то соотношение (133,1) не нарушится. Оно является, таким образом, общим для всех изомультиплетов¹⁾.

Усредним равенство (133,1) по мультиплету. Так как $\bar{T}_3 = 0$ (черта — знак среднего), то

$$\bar{Z} = \frac{Y}{2}. \quad (133,2)$$

¹⁾ Схема изомультиплетов с использованием понятия гиперзаряда (или странности) была впервые сформулирована Гелл-Манном (M. Gell-Mann, 1953) и Нишидзимой (K. Nishijima, 1953). Изложенный подход к выводу (133,1) принадлежит Саката (S. Sakata, 1956).

Из (133,1) следует также определенная связь между Y и T . Так как Z — целое число, а $2T_3$ — число той же четности, что и $2T$, то Y и $2T$ — целые числа одинаковой четности:

$$Y - 2T = \text{четное число.} \quad (133,3)$$

Следует отметить, что понятие гиперзаряда — постороннее по отношению к изотопической симметрии. Поэтому соотношения (133,1—3) отнюдь не являются следствием одних только свойств изоспинов. Подчеркнем также, что при выводе (133,1) мы использовали представление о «составных» частицах, построенных только из реально существующих частиц (n, p, Λ), а не из каких-либо других, логически мыслимых частиц.

В силу соотношения (133,1) сохранение гиперзаряда эквивалентно сохранению T_3 . Полная проекция изоспина системы сохраняется, таким образом, уже при выключении слабых взаимодействий. Сохранение же величины полного изоспина системы требует пренебрежения также и электромагнитными взаимодействиями.

§ 134. Метастабильные адроны

За исключением фотона, в природе не существует стабильных (т. е. не распадающихся самопроизвольно) «элементарных» частиц с целым спином. Существует, однако, класс *метастабильных бозонов*; они относятся к мезонам.

Таблица 1

Мезоны		
Частица	Масса (Мэв)	Время жизни (сек)
π^+, π^-	139,6	$2,6 \cdot 10^{-8}$
π^0	135,0	$0,8 \cdot 10^{-16}$
K^+, K^-	493,8	$1,24 \cdot 10^{-8}$
K^0, \bar{K}^0	497,8	$\left\{ \begin{array}{l} 0,86 \cdot 10^{-10} (K_S^0) \\ 5,4 \cdot 10^{-8} (K_L^0) \end{array} \right.$
η	548,8	$\sim 10^{-19}$

Под метастабильностью мы понимаем устойчивость по отношению к сильным взаимодействиям; распад этих частиц связан лишь с электромагнитными или слабыми взаимодействиями; их времена жизни поэтому сравнительно велики — от 10^{-8} до 10^{-19} сек, между тем как сильное взаимодействие приводило бы к распаду за времена 10^{-21} — 10^{-23} сек.

Существует восемь метастабильных мезонов. Все они обладают спином 0 и отрицательной четностью (псевдоскалярные частицы). В таблице 1 приведены их массы и времена жизни¹⁾.

¹⁾ Два времени жизни у K^0 -мезонов — особое явление, которое будет рассмотрено в § 154.

Пары (π^+, π^-) , (K^+, K^-) , (K^0, \bar{K}^0) составляют частицу и античастицу. Поэтому их массы и времена жизни в точности одинаковы.

Значения заряда и гиперзаряда частиц даются следующей таблицей:

$Y \backslash Z$	-1	0	1	
-1	K^-	\bar{K}^0	-	(134,1)
0	π^-	π^0, η	π^+	
1	-	K^0	K^+	

Поскольку для всех мезонов $B = 0$, то из них странными являются K -мезоны.

Мезоны распределяются по изомультиплетам: изосинглет η , изодублеты $K = (K^0, K^+)$ и $\bar{K} = (\bar{K}^0, K^-)$, изотриплет $\pi = (\pi^+, \pi^0, \pi^-)$. Сопоставляя значения Y и T , можно представить таблицу этих изомультиплетов в виде

$Y \backslash T$	0	$1/2$	1	
-1	-	\bar{K}	-	(134,2)
0	η	-	π	
1	-	K	-	

Компоненты изомультиплетов отличаются значениями T_3 согласно

$$T_3 = \begin{array}{ccc} \overbrace{\pi^+} & \overbrace{\pi^0} & \overbrace{\pi^-} \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \overbrace{K_0} & \overbrace{K^+} \\ -1/2 & 1/2 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \overbrace{\bar{K}_0} & \overbrace{K^-} \\ 1/2 & -1/2 \end{array}$$

Метастабильность π -мезонов обеспечивается тем, что они являются легчайшими из всех адронов вообще. Устойчивость K -мезонов относительно распада на π -мезоны обеспечивается сохранением гиперзаряда. Распад $\eta \rightarrow 2\pi$ запрещен по четности: поскольку все эти частицы не имеют спина, то орбитальный момент в системе двух π был бы $l = 0$, так что ее четность была бы $-1 \cdot -1 = +1$, между тем как четность η есть -1 . В метастабильности η -мезона относительно распада $\eta \rightarrow 3\pi$ можно убедиться путем одновременного применения изотопической

симметрии и симметрии частица — античастица, как это будет показано в следующем параграфе.

Реальные распады π^+ , π^- и K -мезонов связаны со слабыми взаимодействиями; соответствующие времена жизни составляют $10^{-8} - 10^{-10}$ сек. Распады же π^0 и η ($\pi^0 \rightarrow 2\gamma$; η — на фотоны и пионы) имеют электромагнитное происхождение; их времена составляют $10^{-16} - 10^{-19}$ сек.

Мезон π^0 — истинно нейтральная частица. Как таковая, она обладает определенной зарядовой четностью C , а ее распад на два фотона показывает, что $C = +1$.

Среди барионов единственной устойчивой частицей является самый легкий из них — протон. Кроме того, существует ряд метастабильных барионов, распад которых обусловлен слабыми взаимодействиями. Сюда относятся частицы, перечисленные в таблице 2.

Таблица 2

Барионы

Частица	Масса (Мэв)	Время жизни (сек)
p	938,26	∞
n	939,55	$0,93 \cdot 10^{-3}$
Λ	1115,6	$2,5 \cdot 10^{-10}$
Σ^+	1189,4	$0,80 \cdot 10^{-10}$
Σ^0	1192,5	$< 1 \cdot 10^{-14}$
Σ^-	1197,3	$1,5 \cdot 10^{-10}$
Ξ^0	1314,7	$3,0 \cdot 10^{-10}$
Ξ^-	1321,2	$1,7 \cdot 10^{-10}$
Ω^-	1672	$1,3 \cdot 10^{-10}$

Все эти частицы имеют античастицы, которые будем называть *антибарионами*; массы и времена жизни барионов и антибарионов, разумеется, одинаковы¹⁾.

Всем барионам приписывается барионное число $B = 1$, а всем антибарионам — $B = -1$. Барион Ω^- — изосинглет, его гиперзаряд $Y =$

-2 , а его спин (предположительно) равен $3/2$. Все остальные из перечисленных барионов имеют спин $1/2$ и одинаковую четность (напомним, что для фермионов имеет смысл говорить лишь об их относительной, а не абсолютной четности — см. § 27)). По значениям заряда и гиперзаряда имеем:

$Y \backslash Z$	-1	0	1
-1	Ξ^-	Ξ^0	—
0	Σ^-	Σ^0, Λ	Σ^+
1	—	n	p

(134,3)

¹⁾ Антибарионы, как и другие античастицы, обозначают с помощью черты над буквой. Подчеркнем, что $\bar{\Sigma}^-$ и $\bar{\Sigma}^+$ отнюдь не совпадают с Σ^+ и Σ^-

Отличную от нуля странность имеют барионы Λ , Σ , Ξ (а также Ω); их называют также *гиперонами*. По изотопическим свойствам барионы образуют: изосинглет Λ , нуклонный изодублет $N = (p, n)$, гиперонный изодублет $\Xi = (\Xi^0, \Xi^-)$, гиперонный изотриплет $\Sigma = (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$. Сопоставляя значения Y и T , можно расположить эти изомультиплеты в виде таблицы:

$Y \backslash T$	0	$1/2$	1
-1	—	Ξ	—
0	Λ	—	Σ
1	—	N	—

(134,4)

В аналогичные таблицы располагаются антибарионы, обладающие теми же изоспинами T и противоположными по знаку значениями Z и Y .

Наряду с перечисленными в этом параграфе метастабильными частицами, известно значительное число адронов, распадающихся за счет сильных взаимодействий. Ввиду чрезвычайной малости их времени жизни ($10^{-21} - 10^{-23}$ сек) они проявляются на опыте только в виде резонансов в реакциях при высоких энергиях. Эти «частицы» часто называются поэтому просто *резонансами*.

Надо, однако, подчеркнуть, что с точки зрения классификационных свойств способ распада частицы, определяющийся ее положением в общем «спектре масс» частиц и правилами отбора, не имеет существенного значения. Ограничиваясь здесь перечислением метастабильных частиц, мы преследуем лишь иллюстративные цели.

Задачи

1. Используя изотопическую инвариантность сильных взаимодействий, найти связь между дифференциальными сечениями реакций $p + p \rightarrow d + \pi^+$ (1) и $p + n \rightarrow d + \pi^0$ (2).

Решение. Для дейтрона $T = T_3 = 0$ (см. III, § 116); поэтому изотопическое состояние $|TT_3\rangle$ системы продуктов реакции совпадает с состоянием пиона: $|11\rangle$ и $|10\rangle$ соответственно для первой и второй реакции. Исходные же состояния этих реакций даются произведениями $|1/2, 1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle$ и $|1/2, 1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle$. Согласно правилам составления волновых функций при сложении моментов находим

$$|pp\rangle = |1/2, 1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle = |11\rangle,$$

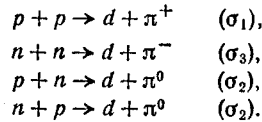
$$|pn\rangle = |1/2, 1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle.$$

Таким образом, для реакции (1) начальное и конечное изотопические состояния совпадают, так что сохранение изоспина соблюдается тождественно. Для реакции же (2) конечное состояние (10) представлено в начальном лишь с вероятностью $(1/\sqrt{2})^2 = 1/2$. Поскольку в остальном (в смысле координатных и спиновых степеней свободы) обе реакции одинаковы, то

$$\sigma_1 = 2\sigma_2,$$

где σ_1, σ_2 — дифференциальные сечения реакций (1) и (2), отнесенные к одним и тем же интервалам энергий и углов разлета при одинаковых взаимных ориентациях спинов частиц.

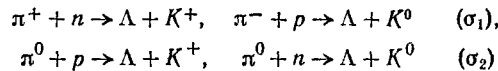
Другой способ решения подобных задач (не требующий использования коэффициентов векторного сложения) состоит в следующем (И. М. Шмушкевич, 1955). Пусть начальные частицы не поляризованы по изоспину. Это значит, что система двух нуклонов NN с равными вероятностями может находиться в состояниях pp, nn, pn, np , из которых идут реакции



В силу изотопической инвариантности взаимодействия, вызывающего реакцию, должны оказаться неполяризованными также и конечные частицы. Это значит в данном случае, что π^+, π^0, π^- должны возникать с одинаковыми вероятностями, т. е. должно быть $\sigma_1 = \sigma_3 = 2\sigma_2$. Отметим также, что равенство $\sigma_1 = \sigma_3$ заранее очевидно из того, что обе реакции отличаются лишь одновременным изменением знака T_3 у всех частиц¹⁾.

2. То же для реакций $\pi + N \rightarrow \Lambda + K$.

Решение. С учетом сохранения гиперзаряда возможны реакции

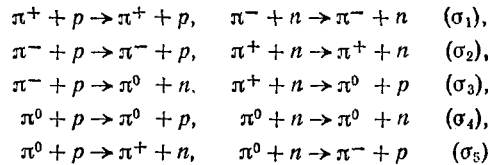


(объединены в пары реакции, отличающиеся знаком всех T_3). Условие изотопической неполяризованности K при неполяризованных π и N выполняется тождественно. Если же рассмотреть обратные реакции и потребовать неполяризованности π при неполяризованных K , то получим

$$\sigma_1 = 2\sigma_2.$$

3. То же для реакций πN -рассеяния.

Решение. При столкновении неполяризованных по изоспину пиона и нуклона идут реакции



(спова объединены в пары реакции, отличающиеся знаком всех T_3). Из

¹⁾ Инвариантность по отношению к этому преобразованию иногда называют *изотопической симметрией* в отличие от более общего понятия изотопической инвариантности, включающей ее в себя как частный случай.

требования неполяризованности конечных пионов получим

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 2(\sigma_3 + \sigma_4).$$

Кроме того, $\sigma_3 = \sigma_5$, как сечения прямой и обратной реакций. Поэтому

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3 + 2\sigma_4.$$

4. Найти связь между сечениями реакций

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \quad (\sigma_1),$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p \quad (\sigma_2),$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + n \quad (\sigma_3),$$

если конечное состояние может иметь только изоспин $T = 3/2$ ¹⁾.

Решение. По правилам сложения моментов находим

$$|\pi^+ p\rangle \equiv |11\rangle |1/2 \ 1/2\rangle = |3/2 \ 3/2\rangle,$$

$$|\pi^- p\rangle \equiv |1-1\rangle |1/2 \ 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |3/2 \ -1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2 \ -1/2\rangle,$$

$$|\pi^0 n\rangle \equiv |10\rangle |1/2 \ -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2 \ -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |1/2 \ -1/2\rangle.$$

Пусть $S_{1/2} = 0, S_{3/2} = A$ (обозначение S_T из (132,10)). Тогда

$$\langle \pi^+ p | S | \pi^+ p \rangle = A, \quad \langle \pi^- p | S | \pi^- p \rangle = \frac{1}{3} A, \quad \langle \pi^0 n | S | \pi^- p \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} A.$$

Отсюда

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 9 : 1 : 2.$$

5. С учетом изотопической инвариантности выделить инвариантные амплитуды в амплитуде упругого πN -рассеяния.

Решение. Общий вид амплитуды рассеяния:

$$M_{fi} = f_1(\chi_1 \chi_2)(\chi_3 \chi_4) + f_2(\chi_1 \chi_3)(\chi_2 \chi_4) + f_3(\chi_1 \chi_4)(\chi_2 \chi_3),$$

где χ_1, χ_2, \dots — изотопические волновые амплитуды (изобекторы) двух начальных и двух конечных пионов, f_1, f_2, f_3 — инвариантные амплитуды, функции кинематических инвариантов s, t, u (их число — три — совпадает с числом возможных значений полного изоспина системы двух частиц с изоспинами 1). Функции f_1, f_2, f_3 обладают определенной симметрией, отвечающей тождественности четырех пионов. Так, при перестановке двух начальных пионов: $\chi_1 \leftrightarrow \chi_2, s \rightarrow s, t \leftrightarrow u$, откуда

$$f_1(s, u, t) = f_1(s, t, u), \quad f_2(s, u, t) = f_3(s, t, u).$$

6. То же для упругого πN -рассеяния.

Решение. Сложение изоспинов $1/2$ и 1 дает два возможных значения полного изоспина, соответственно чему имеются две изотопические амплитуды рассеяния. Общий вид M_{fi} :

$$M_{fi} = M_1 + M_2(v^* \tau v) [\chi^* \chi]$$

$$M_1 = f_1(\hat{u}'u) + g_1(\hat{u}'\hat{P}u), \quad M_2 = f_2(\hat{u}'u) + g_2(\hat{u}'\hat{P}u).$$

¹⁾ Таков резонанс при кинетической энергии пионов 190 Мэв.

Здесь f_1, f_2, g_1, g_2 — инвариантные амплитуды; u, u' — биспинорные амплитуды начального и конечного нуклонов, а $P = p + p'$, где p, p' — 4-импульсы пионов (ср. (71,3)); χ, χ' — изотопические волновые амплитуды пионов (изовекторы), а v, v' — изоамплитуды нуклонов (изоспиноры); τ — матрицы Паули, действующие на изоспинорные индексы.

7. То же для упругого NN -рассеяния.

Решение. Общий вид амплитуды рассеяния:

$$M_{fi} = M_1 + M_2 (v_1' \tau v_1) (v_2' \tau v_2), \quad M_1 = \sum_{i=1}^k f_i F_i, \quad M_2 = \sum_{i=1}^k g_i F_i.$$

Здесь f_i, g_i — инвариантные амплитуды; v_1, v_1', \dots — изоспинорные амплитуды четырех нуклонов; F_i — инварианты, составленные из биспинорных амплитуд нуклонов (см. (71,4)).

§ 135. G-четность

Уже упоминалось о том, что сильные взаимодействия сохраняют зарядовую четность и изоспин системы адронов. Эти два закона сохранения при их одновременном применении приводят к появлению новых правил отбора, которые ни одним из них в отдельности не устанавливались бы (*T. D. Lee, C. N. Yang, 1956*).

Изотопическая инвариантность сильных взаимодействий может быть сформулирована как инвариантность относительно «поворотов в изопространстве». Рассмотрим поворот на угол π вокруг оси x^2 этого пространства. Изоспинор $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$ преобразуется согласно

$$\psi \rightarrow e^{i\pi T_2} = e^{i\frac{\pi}{2} \tau_2} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i\tau_2 \sin \frac{\pi}{2} \right) \psi = i\tau_2 \psi. \quad (135,1)$$

В частности, для изоспиноров, отвечающих двум компонентам изодублета (будем говорить — протону и нейтрону), имеем

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$p \rightarrow -n, \quad n \rightarrow p,$$

где p и n — обозначают для краткости зарядовые состояния $|p\rangle$ и $|n\rangle$. Аналогичным образом найдем такое же преобразование для антинуклонов:

$$\bar{p} \rightarrow -\bar{n}, \quad \bar{n} \rightarrow \bar{p}.$$

Дополним теперь рассмотренный поворот операцией зарядового сопряжения C ; произведение обоих операторов обозначим через G :

$$G = C e^{i\pi T_2}. \quad (135,2)$$

Поскольку зарядовое сопряжение есть преобразование $p \leftrightarrow \bar{p}$, $n \leftrightarrow \bar{n}$, то под действием оператора (135,2)

$$G: p \rightarrow -\bar{n}, \quad n \rightarrow \bar{p}, \quad \bar{p} \rightarrow -n, \quad \bar{n} \rightarrow p. \quad (135,3)$$

Оператор G коммутативен с операторами всех трех компонент изоспина T_1, T_2, T_3 . В этом проще всего убедиться прямым образом, написав явные выражения операторов в виде четырехрядных матриц, преобразующих нуклонные и антинуклонные состояния. Расположив эти состояния в виде столбика

$$\begin{pmatrix} p \\ n \\ \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix},$$

получим

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\tau_2 \\ i\tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(здесь 0 и 1 — двухрядные матрицы).

Если операция G превращает частицу (или систему частиц) саму в себя, то возникает понятие о ее G -четности: состояние может остаться неизменным или изменить знак. Для этого необходимо, чтобы барионное число и гиперзаряд частицы были равны нулю. Действительно, зарядовое сопряжение (переход от частицы к античастице) меняет знак как электрического заряда Z , так и чисел Y, B . Поворот же в изопространстве меняет Z , не затрагивая Y и B . Поэтому совместное применение обоих преобразований во всяком случае изменит числа Y, B , если они отличны от нуля.

Важное свойство G -четности состоит в том, что она одинакова у всех компонент одного и того же изомультиплета. Это следует из коммутативности оператора G со всеми компонентами T , а поэтому и со всеми поворотами в изопространстве.

При $Y = 0$ имеем $Z = T_3$, откуда видно, что T_3 , а тем самым и T — целое число. Изомультиплет с целым T описывается симметричным изоспинором четного ранга $2T$, эквивалентным неприводимому изотензору $\psi_{ik\dots}$ ранга T . Среди компонент такого изомультиплета имеется нейтральная частица ($T_3 = 0$). Ей отвечает изотензор $\psi_{ik\dots}$ с отличной от нуля лишь компонентой $\psi_{33\dots}$. Поворот на угол π вокруг оси x^2 умножает этот изотензор на $(-1)^T$. Если C — зарядовая четность нейтральной частицы, то ее G -четность

$$G = C (-1)^T. \quad (135,4)$$

Согласно сказанному выше тем самым определена G -четность всех компонент изомультиплета.

Рассмотрим, например, изотриплет пионов ($T = 1$). Зарядовая четность π^0 -мезона $C = +1$ (это следует из того, что π^0 распадается на четное число — два — зарядово-нечетных частиц — фотонов). Поэтому G -четность пионов $G = -1$. Отсюда можно, в частности, заключить, что под влиянием сильного взаимодействия система пионов может перейти в другую систему пионов лишь без изменения четности числа частиц.

η -мезон — изосинглет ($T = 0$), а его зарядовая четность $C = +1$ (η -мезон, как и π^0 , распадается на два фотона). Поэтому $G = +1$. Отсюда следует, что сильные взаимодействия не могут привести к распаду $\eta \rightarrow 3\pi$.

§ 136. Унитарная симметрия $SU(3)$

Имеющиеся экспериментальные данные дают основания полагать, что изотопическая симметрия является лишь одним из проявлений более высокой симметрии, свойственной сильным взаимодействиям¹⁾. В этой симметрии электрический заряд и гиперзаряд выступают равноправно: наряду с соотношением

$$Z = \frac{Y}{2} + T_3 \quad (136,1)$$

можно написать также и равенство

$$Y = \frac{Z}{2} + U_3, \quad (136,2)$$

где U_3 — проекция еще одного сохраняющегося «спина» (назовем его u -изоспином в отличие от изоспина T , который в этой связи будем называть t -изоспином).

В связи с этим возникает вопрос об исследовании свойств симметрии, в которой фигурирует одновременно два аддитивных квантовых числа²⁾.

Мы видели в § 132, что в основе изотопической симметрии лежит симметрия изодублета двух «фундаментальных» частиц, отличающихся значениями одного квантового числа $T_3 = \pm 1/2$. Компоненты изомультиплетов более высокой кратности могут

¹⁾ Точность соблюдения требований этой симметрии оказывается фактически невысокой. Наглядно эту ситуацию можно представлять себе так, как если бы сильные взаимодействия складывались из «собственно сильных» и «умеренных» взаимодействий, причем полная симметрия обнаруживается лишь после «выключения» последних. Соответствующий параметр разложения оценивается примерно как $\sim 1/10$.

²⁾ Классификация частиц на основании этой симметрии была введена впервые независимо Гелл-Манном и Негманом (М. Gell-Mann, Y. Ne'eman, 1961).

быть имитированы (в отношении своих изотопических свойств) «составными» частицами, построенными из определенных наборов фундаментальных частиц. Естественно, что таким путем мы приходим к симметрии, связанной всего с одним аддитивным квантовым числом T_3 .

Отсюда ясно, что мы приходим к симметрии с двумя квантовыми числами, если будет исходить из симметрии, выражающей равноправность трех различных «фундаментальных» частиц, отличающихся значениями двух независимых квантовых чисел. Эти гипотетические частицы названы *кварками*; будем обозначать их символами Q_p, Q_n, Q_λ . Сразу же подчеркнем, однако, что хотя рассматриваемая симметрия может быть наглядно описана с помощью этих частиц, их реальное существование в природе тем самым не становится еще обязательным. В принципе возможна ситуация, когда реально существующими оказываются лишь «составные» частицы.

Будем рассматривать суперпозиции

$$\psi^1 |Q_p\rangle + \psi^2 |Q_n\rangle + \psi^3 |Q_\lambda\rangle. \quad (136,3)$$

Совокупность трех величин

$$\psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix} \quad (136,4)$$

назовем *суперспинором*. Равноправность различных суперпозиций означает, что ψ можно подвергнуть произвольному унитарному унимодулярному преобразованию U ; совокупность этих преобразований образует группу $SU(3)$ (ср. примечание на стр. 180).

Матрицу U , осуществляющую преобразование группы $SU(3)$, как и всякую унитарную матрицу, можно представить в виде

$$U = e^{iR}, \quad (136,5)$$

где R — эрмитова матрица. Так как $|U| = 1$, то $\text{Sp } R = 0$. При бесконечно малых преобразованиях $U = 1 + i\delta R$. Общий вид бесконечно малой матрицы δR :

$$\delta R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \delta\alpha_i \cdot \lambda_i, \quad (136,6)$$

где $\delta\alpha_i$ — вещественные параметры, а λ_i — линейно независимые трехрядные эрмитовы матрицы с нулевым следом; ясно, что их всего восемь ($3 \cdot 3 - 1 = 8$). Таким образом, бесконечно малое преобразование суперспинора: $\psi^a \rightarrow \psi^a + \delta\psi^a$, где

$$\delta\psi^a = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^8 \delta\alpha_i (\lambda_i)_b^a \psi^b \quad (136,7)$$

$((\lambda_i)_b^a)$ — элемент матрицы λ_i , причем верхний индекс — номер строки, а нижний — номер столбца).

Совокупность восьми матриц λ_i можно назвать оператором *суперспина*¹⁾. Их явный вид легко получить, заметив, что в частных случаях, когда суперпозиция (136,3) содержит лишь два слагаемых, λ_i должны сводиться к матрицам Паули. Отсюда мы приходим к девяти матрицам типа матриц Паули, в которых в одной из строк и одном из столбцов — нули:

$$\begin{aligned} t_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ u_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & u_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & u_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & v_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & v_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (136,8)$$

Из этих матриц лишь 8 независимы: $t_3 + u_3 = v_3$. В качестве λ_i выберем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= t_1, & \lambda_2 &= t_2, & \lambda_3 &= t_3, \\ \lambda_4 &= v_1, & \lambda_5 &= v_2, & \lambda_6 &= u_1, & \lambda_7 &= u_2, \\ \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u_3 + v_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (136,9)$$

Все эти матрицы нормированы так, что

$$\text{Sp } \lambda_i \lambda_k = 2\delta_{ik}, \quad (136,10)$$

а сумма их квадратов пропорциональна единичной матрице:

$$\sum_{i=1}^8 \lambda_i^2 = \frac{16}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (136,11)$$

Правила коммутации матриц λ_i имеют вид

$$[\lambda_i, \lambda_k]_- = 2i \sum_{l=1}^8 f_{ikl} \lambda_l, \quad (136,12)$$

причем в силу (136,10)

$$f_{ikl} = \frac{1}{4i} \text{Sp} ([\lambda_i, \lambda_k]_- \lambda_l). \quad (136,13)$$

¹⁾ Напомним, что для обычных (трехмерных) спиноров $\delta R = \frac{1}{2} \delta \theta \cdot \sigma$ где $\delta \theta$ — угол поворота системы координат.

Отсюда следует, что коэффициенты f_{ikl} антисимметричны по всем трем индексам. Отличны от нуля

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2},$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и остальные, получающиеся отсюда перестановками индексов с соответствующими измерениями знака¹⁾.

Взаимную симметрию трех кварков можно наглядно иллюстрировать графически, изобразив их тремя точками, расположенными в вершинах равностороннего треугольника (рис. 25).

Это — то единственное расположение, в котором три точки равноправны. Положение каждой из точек на плоскости определяется двумя координатами, которым отвечают два независимых квантовых числа, характеризующих частицы. Естественный выбор начала координат на этой диаграмме — центр треугольника, а естественные оси — три оси, проходящие через вершины треугольника (X, Y, Z на рис. 25), и три оси, параллельные его сторонам (T_3, U_3, V_3), причем естественные единицы длин вдоль этих осей — соответственно высоты и стороны треугольника. Координаты точек (квантовые числа кварков) можно задать относительно любой пары этих осей, а значения остальных чисел выразятся через эти две. Обозначения осей на рис. 25 выбраны так, чтобы выполнялись соотношения (136,1—2), в чем легко убедиться, например, выписав координаты точек в осях Y, T_3 или Z, U_3 :

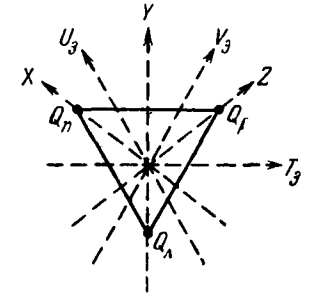


Рис. 25.

$$\begin{array}{ccc} Q_p & Q_n & Q_\Lambda \\ (Y, T_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \\ (Z, U_3) = \left(\frac{2}{3}, 0\right) & \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \end{array} \quad (136,14)$$

¹⁾ В математической теории непрерывных групп матрицы, определяющие инфинитезимальные преобразования группы, называются ее генераторами, а об алгебре этих матриц говорят как об алгебре Ли. Основу алгебры Ли составляют правила коммутации генераторов; ими определяется структура группы.

Обратим внимание на то, что заряд и гиперзаряд кварков оказываются при этом дробными числами¹⁾.

Двум независимым квантовым числам кварков должны быть сопоставлены операторы — диагональные матрицы. Среди матриц λ_i диагональны λ_3 и λ_8 . Сравнив их с квантовыми числами (136,14), находим

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8, \quad T_3 = \frac{1}{2} \lambda_3, \quad Z = \frac{1}{2} \left(\lambda_3 + \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} \right). \quad (136,15)$$

Среди преобразований группы $SU(3)$ имеется подгруппа $SU(2)$ преобразований, затрагивающих только две компоненты суперспинора — ψ^1 и ψ^2 . По отношению к этой подгруппе (которую можно называть t -изогруппой) кварки Q_p, Q_n составляют изодублет ($T = 1/2$), а Q_Λ — изосинглет. По отношению же к подгруппе преобразований, затрагивающих лишь ψ^2 и ψ^3 (u -изогруппа), составляет изодублет ($U = 1/2$) пара Q_n, Q_Λ , а Q_p — изосинглет. Наряду с этими двумя автоматически возникает еще и третья аналогичная подгруппа (v -изогруппы), в которой изодублетную пару образуют Q_p, Q_Λ . Тройки матриц (t_1, t_2, t_3) , (u_1, u_2, u_3) , (v_1, v_2, v_3) составляют операторы соответственно t -, u - и v -изоспинов.

Волновые функции, комплексно-сопряженные функциям (136,3), должны рассматриваться как суперпозиции состояний антикварков. Если записать такую суперпозицию в виде

$$\psi_1 |\bar{Q}_p\rangle + \psi_2 |\bar{Q}_n\rangle + \psi_3 |\bar{Q}_\Lambda\rangle, \quad (136,16)$$

то величины ψ_a преобразуются, следовательно, как ψ^{a*} . Три величины (ψ_1, ψ_2, ψ_3) составляют ковариантный суперспинор (в противоположность контравариантному (136,4)). Имея в виду эрмитовость матриц λ_i , найдем из (136,7), что при бесконечно малом преобразовании

$$\delta\psi_a = -\frac{i}{2} \sum_{i=1}^8 \delta\alpha_i (\lambda_i)_a^b \psi_b. \quad (136,17)$$

Существенно, что из компонент ψ_a нельзя составить линейных комбинаций, которые преобразовывались бы как ψ^a . Поэтому в группе $SU(3)$ контра- и ковариантные суперспиноры — два независимых типа величин. В этом отношении они отличаются от обычных спиноров, для которых контра- и ковариантные компо-

¹⁾ Разумеется, геометрическое построение рис. 25 само по себе не может составить достаточное основание для отождествления координат точек с физическими квантовыми числами кварков. Такие основания дает в действительности лишь дальнейшее согласование со свойствами реально существующих частиц (§ 137).

ненты связаны линейными соотношениями $\psi_a = e_{a\beta} \psi^\beta$ (где $e_{a\beta}$ — единичный антисимметричный символ, $e_{12} = 1$).

Происхождение этого различия состоит в следующем. В группе $SU(2)$ квадратичная форма $\psi^\alpha \varphi^{a*}$ (ψ, φ — два спинора) инвариантна в силу унитарности преобразований группы, а квадратичная форма $\psi^\alpha \varphi^\beta e_{\alpha\beta}$ — в силу их унимодулярности. Сравнение обоих инвариантов и показывает, что φ^{a*} преобразуются как $e_{a\beta} \varphi^\beta$. В группе же $SU(3)$ унитарность выражается инвариантностью квадратичной формы $\psi^a \varphi^{a*}$ (ψ, φ — два суперспинора), а унимодулярность — инвариантностью кубической формы $e_{abc} \psi^a \varphi^b \chi^c$ ($e_{abc} = e^{abc}$ — единичный антисимметрический символ, $e_{123} = 1$). Отсюда видно, что φ^{a*} преобразуются как квадратичные (а не линейные) комбинации $e_{abc} \varphi^b \chi^c$.

§ 137. Супермультиплеты

Волновая функция системы, состоящей из p кварков и q антикварков, представляет собой суперспинор высшего ранга с p верхними и q нижними индексами:

$$\psi_{b_1 b_2 \dots b_q}^{a_1 a_2 \dots a_p}.$$

Это — величины, преобразующиеся как произведения p компонент контравариантного и q компонент ковариантного суперспиноров первого ранга. Ввиду неэквивалентности верхних и нижних индексов складывать их числа не имеет смысла, так что ранг суперспинора должен выражаться парой чисел p, q .

Ранг суперспинора может быть понижен двумя неэквивалентными способами: свертыванием по одному верхнему и одному нижнему индексу (т. е. умножением на единичный симметрический символ δ_a^b) и антисимметризацией по паре верхних или паре нижних индексов (т. е. умножением на $e_{a_1 a_2 b}$ или $e^{b_1 b_2 a}$). Так,

$$\psi_{b_1 a_2}^{a_1} \delta_{a_1}^{b_1} = \psi^{a_2},$$

$$\psi^{a_1 a_2 a_3} e_{a_1 a_2 b} = \psi_b^{a_3}, \quad \psi_{b_1 b_2 b_3} e^{b_1 b_2 a} = \psi_b^{a_3}.$$

Ранг суперспинора не может быть понижен, следовательно, если он симметричен по всем верхним и по всем нижним индексам (по отдельности) и если равны нулю его следы по любой паре из одного верхнего и одного нижнего индексов. Такие суперспиноры называют *неприводимыми*; их компоненты реализуют неприводимые представления группы $SU(3)$. Число независимых компонент неприводимого суперспинора ранга $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$

равно ¹⁾

$$N_{pq} = \frac{1}{2} (p+1)(q+1)(p+q+2). \quad (137,1)$$

Если состояние частицы описывается суперспинором ранга $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, то существует N_{pq} взаимно вырожденных состояний, составляющих *супермультиплет* частиц. В рамках рассматриваемой симметрии все эти состояния равноправны и нет оснований для выделения какого-либо определенного их набора. Однако при «включении» взаимодействий, нарушающих симметрию, становится существенной классификация компонент супермультиплета по значениям квантовых чисел, характеризующих эти взаимодействия. В этом смысле супермультиплет может быть разбит на несколько изомультиплетов, компоненты которых обладают определенными значениями квантовых чисел Y, T, T_3 .

Согласно (136,14) компонентам контравариантного суперспинора 1-го ранга отвечают следующие значения чисел Y и T_3 :

$$(Y, T_3) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^2 \\ \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^3 \\ -\frac{2}{3}, 0 \end{pmatrix}$$

Квантовые числа антикварков противоположны квантовым числам кварков, так что для компонент ковариантного суперспинора

$$(Y, T_3) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \frac{2}{3}, 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что компонентам суперспинора ранга $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ отвечают значения

$$T_3 = \frac{p_1 - p_2}{2} - \frac{q_1 - q_2}{2}, \quad (137,2)$$

$$Y = \frac{p_1 + p_2 - 2p_3}{3} - \frac{q_1 + q_2 - 2q_3}{3} = \frac{p-q}{3} - (p_3 - q_3),$$

¹⁾ Обозначим через p_1, p_2, p_3 (или q_1, q_2, q_3) число единиц, двоек и троек среди p верхних (или q нижних) индексов. Так как $p_1 + p_2 + p_3 = p$, то при заданном p_2 число p_1 может пробегать $p - p_2 + 1$ значений от 0 до $p - p_2$. Поэтому

$$N_{p0} = \sum_{p_2=0}^p (p - p_2 + 1) = \frac{1}{2} (p+1)(p+2).$$

Если не требовать равенства нулю следов суперспинора, то N_{pq} давалось бы произведением $N_{p0}N_{0q}$. Условие нулевого следа эквивалентно равенству нулю суперспинора ранга $(p-1, q-1)$. Поэтому

$$N_{pq} = N_{p0}N_{0q} - N_{p-1,0}N_{0,q-1};$$

отсюда и получается (137,1).

а с ними и

$$Z = \frac{Y}{2} + T_3 = -\frac{p-q}{3} + p_1 - q_1. \quad (137,3)$$

Все известные в настоящее время частицы обладают целыми значениями зарядов Y и Z . Они могут входить лишь в супермультиплеты, для которых

$$p - q = 3n, \quad (137,4)$$

где n — целое число. Соответствующие суперспиноры называют *супертензорами*, в противоположность собственно суперспинорам, для которых $p - q \neq 3n$ ¹⁾.

Супертензор наиболее низкого ранга образуют величины ψ_b^a ($\psi_a^a = 0$). Он имеет 8 независимых компонент и в алгебре суперспиноров играет роль вектора (число компонент совпадает с числом параметров, определяющих преобразования группы $SU(3)$). Восемь компонент супервектора A_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) связываются с компонентами ψ_a^b ($a, b = 1, 2, 3$) соотношениями²⁾

$$\psi_b^a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 A_i (\lambda_i)_b^a, \quad A_i = \text{Sp}(\psi \lambda_i) \equiv \psi_b^a (\lambda_i)_a^b. \quad (137,5)$$

В раскрытом виде это дает

$$\psi_b^a = \frac{1}{2} \begin{matrix} b \rightarrow \\ \downarrow a \\ \left(\begin{array}{ccc} A_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_8 & A_1 - iA_2 & A_4 - iA_5 \\ A_1 + iA_2 & -A_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_8 & A_6 - iA_7 \\ A_4 + iA_5 & A_6 + iA_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} A_8 \end{array} \right) \end{matrix}. \quad (137,6)$$

¹⁾ Эта терминология аналогична принятой в обычной спинорной алгебре и имеет следующий математический смысл. В число преобразований группы $SU(2)$ входят умножения на $U = \sqrt{1} = \pm 1$. Спиноры нечетных рангов меняют знак при преобразовании $U = -1$, тензоры же (спиноры четных рангов) остаются неизменными. Аналогично в группу $SU(3)$ входят преобразования $U = \sqrt[3]{1} = 1, e^{\pm 2\pi i/3}$. Супертензоры, в противоположность собственно суперспинорам, не меняются при преобразованиях $U = e^{\pm 2\pi i/3}$.

²⁾ Такое определение аналогично связи между компонентами обычного спинора 2-го ранга ψ_β^α и трехмерного вектора A , которую можно представить в виде

$$\psi_\beta^\alpha = \frac{1}{2} A \sigma_\beta^\alpha, \quad A = \psi_\beta^\alpha \sigma_\alpha^\beta.$$

Рассмотрим подробнее структуру двух первых супермультиплетов: ψ_b^a (8 компонент, *супероктет*) и ψ^{abc} (10 компонент, *супердекуплет*).

Приписав компонентам ψ_b^a значения Y, T_3 согласно (137,2) и изобразив эти пары значений точками на плоскости, получим диаграмму октета, изображенную на рис. 26, а; двойной кружок в начале координат означает, что эта пара значений Y, T_3 встречается дважды.

Пары Y, T_3 распределяются на группы, составляющие изомультиплеты с определенными значениями Y и T ; в результате получается диаграмма рис. 26, б, где каждая точка изображает

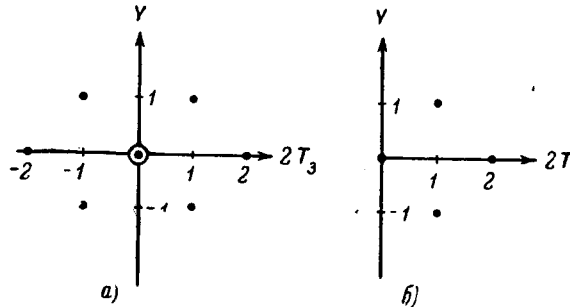


Рис. 26.

изомультиплет. Таким образом, супероктет содержит в себе изосинглет, изотриплет и два изодублета. Им отвечают следующие компоненты ψ_a^b :

	Y	T
$\psi_1^1, \psi_2^2, \psi_1^2, \psi_2^1$	0	0 и 1
ψ_3^1, ψ_3^2	1	$1/2$
ψ_1^3, ψ_2^3	-1	$1/2$

(137,7)

В первой строке можно выделить комбинации, отвечающие определенным значениям T . Компонента $-\psi_3^3 = \psi_1^1 + \psi_2^2$ — изоскаляр, и потому ей отвечает $T = 0$. Ортогональная же ей комбинация $\psi_1^1 - \psi_2^2$ отвечает состоянию с $T = 1, T_3 = 0$. Таким образом, изотриплету и изосинглету соответствуют компоненты

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^1 - \psi_2^2), \quad \psi_1^2, \psi_2^1 \quad (T = 1),$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}(\psi_1^1 + \psi_2^2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\psi_1^1 + \psi_2^2 - 2\psi_3^3) \quad (T = 0).$$

(137,8)

Составляют супероктеты, по-видимому, перечисленные в (134,2) мезоны и перечисленные в (134,4) барионы. Барионный октет описывается суперспинором (верхний индекс — строка, нижний — столбец)

$$\psi_b^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda \end{pmatrix}. \quad (137,9)$$

Эту таблицу надо понимать в том смысле, что для получения нормированного ψ_b^a для какой-либо частицы надо заменить ее символ единицей, а все остальные — нулями (ср. ниже (138,7)).

Октет антибарионов описывается суперспинором $\bar{\psi}_b^a$, комплексно-сопряженным суперспинору (137,9):

$$\bar{\psi}_b^a = \psi_{a^*}^{b*}. \quad (137,10)$$

Для мезонного октета

$$\psi_b^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \eta \end{pmatrix}. \quad (137,11)$$

Этот суперспинор эрмитов ($\psi_a^{b*} = \psi_b^a$): частицы входят в него вместе со своими античастицами¹⁾.

Наконец, рассмотрим супермультиплет, описывающийся неприводимыми суперспинорами ψ^{abc} ; он содержит 10 компонент

¹⁾ Барионы отличаются от мезонов значением барионного числа B . Это квантовое число — постороннее по отношению к рассматриваемой группе симметрии и должно быть учтено здесь путем приписывания кваркам определенного значения $B = 1/3$ как дополнительной характеристики (для антикварка $B = -1/3$). Мезоны «состоят» из одного кварка и одного антикварка (один верхний и один нижний индекс у ψ_b^a). Барионы же надо рассматривать при этом как «состоящие» из трех кварков, чему отвечает суперспинор $e^{abd} \psi_c^a$ с тремя верхними индексами.

(декуплет). На рис. 27 изображены его диаграммы в осях Y, T_3 и Y, T . Соответствие между компонентами ψ^{abc} и значениями квантовых чисел следующее:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{333} (1) \quad | -200 \rangle \\ \psi^{331} (3) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} | -1\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \rangle \\ \psi^{332} (3) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} | -1\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \rangle \\ \psi^{311} (3) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} | 01 \quad -1 \rangle \\ \psi^{312} (6) \quad \frac{1}{\sqrt{6}} | 010 \rangle \\ \psi^{322} (3) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} | 011 \rangle \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} | Y T T_3 \rangle \\ | Y T T_3 \rangle \\ \psi^{111} (1) \quad | 1\frac{3}{2} \quad -\frac{3}{2} \rangle \\ \psi^{112} (3) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} | 1\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \rangle \\ \psi^{122} (3) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} | 1\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \rangle \\ \psi^{222} (1) \quad | 1\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \rangle \end{array} \right. \quad (137,12)$$

(в скобках после символа ψ^{abc} указано число одинаковых

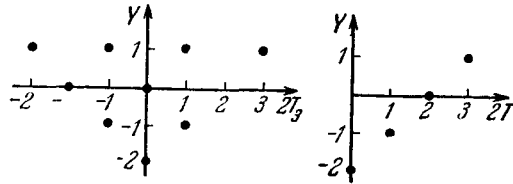


Рис. 27.

компонент, получающихся перестановкой индексов a, b, c). Символы $|YTT_3\rangle$ надо понимать как соответствующие компоненты изоспиноров¹⁾.

Задача

Разложить на неприводимые части произведения двух неприводимых суперспиноров: $\psi_a^b \varphi_c^d, \psi^{abc} \varphi_{def}, \psi^{abc} \varphi_e^d$.

Решение. Симметризовав произведение $\psi_a^b \varphi_c^d$ по парам индексов ac и bd и обратив в нуль его след, получим неприводимый суперспинор ранга $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (ниже символ ранга понимается как символ неприводимого суперспинора). Подняв нижнюю или опустив верхнюю пару индексов, т. е. образовав $e^{ade} \psi_a^b \varphi_c^e$ и $e_{ade} \psi_b^d \varphi_c^e$, и симметризовав по abc , получим суперспиноры $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Свернув по одной паре индексов двумя способами ($\psi_a^b \varphi_b^d$ и $\psi_a^b \varphi_c^d$),

¹⁾ Известен декуплет барионов со спином $3/2$. В него входят 9 неустойчивых частиц (резонансов), а также метастабильный барион Ω^- (изосинглет).

симметризовав по второй паре и обратив след в нуль, получим два суперспинора $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Наконец, свернув по двум парам индексов, получим суперскаляр $\psi_a^b \varphi_b^a$. Эти результаты можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом получается

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

§ 138. Суперспинорные операторы

Применение унитарной симметрии для установления соотношений между физическими характеристиками частиц и между вероятностями различных реакций сводится к вычислению матричных элементов операторов, обладающих определенным суперспинорным характером.

Рассмотрим операторы F_i ($i = 1, 2, \dots, 8$), которые по своим трансформационным свойствам являются компонентами супервектора. В своем действии на суперспинорные индексы волновой функции такие операторы сводятся к умножению на соответствующую компоненту суперспина — матрицу λ_i^r . Поэтому общий вид векторного оператора, действующего на суперспинорную волновую функцию ψ ранга $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, есть

$$F_i = c_1 \Lambda_i + c_2 \bar{\Lambda}_i, \quad \Lambda_i = \sum_{r=1}^p \lambda_i^{(r)}, \quad \bar{\Lambda}_i = \sum_{r=1}^q \bar{\lambda}_i^{(r)}, \quad (138,1)$$

где через λ_i и $\bar{\lambda}_i$ обозначены одни и те же матрицы, но действующие соответственно на верхние и на нижние индексы функции ψ :

$$(\lambda_i \psi)^a = (\lambda_i)_b^a \psi^b, \quad (\bar{\lambda}_i \psi)_a = (\bar{\lambda}_i)_a^b \psi_b. \quad (138,2)$$

Индекс же r указывает номер индекса, на который действует данная матрица (ввиду симметричности ψ по всем верхним и по всем нижним индексам фактически достаточно подействовать на один из верхних и один из нижних индексов, умножив результат на p или q). Напомним, что верхние и нижние суперспинорные индексы отвечают существенно различным трансформационным свойствам; именно поэтому слагаемые Λ_i и $\bar{\Lambda}_i$ должны

¹⁾ Подобно тому как обычные векторные операторы в их действии на спиновые индексы волновой функции выражаются через матрицы Паули σ .

в общем случае входит в (138,1) с различными независимыми коэффициентами.

Компонентам супервектора можно сопоставить согласно (137,6) компоненты смешанного суперспинора 2-го ранга. Соответственно этому вместо операторов F_i можно ввести операторы F_b^a ($a, b = 1, 2, 3$; $F_a^a = 0$). Общий вид (138,1) для них запишется как

$$F_b^a = c_1 \Lambda_b^a + c_2 \bar{\Lambda}_b^a, \quad (138,3)$$

$$\Lambda_b^a = \sum_{r=1}^p \lambda_b^{a(r)}, \quad \bar{\Lambda}_b^a = \sum_{r=1}^q \bar{\lambda}_b^{a(r)}, \quad (138,4)$$

где матрицы λ_b^a выражаются через λ_i согласно (137,6). Их явный вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_1^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_1^1 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \lambda_2^2 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \lambda_3^3 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (138,5)$$

Обратим внимание на то, что эти матрицы вещественны, а λ_a^b — транспонированная по отношению к λ_b^a :

$$(\lambda_a^b)_{a'}^{b'} = (\lambda_b^a)_{b'}^{a'}$$

В качестве примера рассмотрим расщепление масс супермультиплета, вызванное «умеренной» частью сильных взаимодействий, нарушающей унитарную симметрию (M. Gell-Mann, 1961; S. Okubo, 1962).

Не обладая полной симметрией $SU(3)$, это взаимодействие, однако, обладает изотопической симметрией, свойственной всем сильным взаимодействиям вообще. Поэтому оператор, определяющий расщепление масс, должен быть изоскаляром. Простейшим изоскаляром, не являющимся в то же время скаляром по отношению ко всей группе $SU(3)$, является $\frac{3}{2}$ -компонента су-

¹⁾ Не смешивать индексы a, b номеров матриц с индексами a', b' , перечисляющими элементы этих матриц!

перспинора. Естественно предположить, что именно таков и будет характер оператора расщепления масс (обозначим его m_3^3). Изомультиплеты остаются при этом нерасщепленными; дальнейшее их расщепление должно быть связано уже с электромагнитными взаимодействиями.

Искомые поправки к массам компонент супероктета (средние значения оператора m_3^3) в наиболее общем виде даются выражением вида

$$\Delta m = c_1 \bar{\psi}_b^c (\lambda_3^3)_a^b \psi_c^a + c_2 \bar{\psi}_c^b (\lambda_3^3)_b^a \psi_c^a \quad (138,6)$$

($\bar{\psi}_c^b = \psi_b^{c*}$). При вычислении по этой формуле надо оставлять в (137,9) (октет барионов) или в (137,11) (октет мезонов) поочередно отличными от нуля лишь те из компонент ψ_a^b , которые отвечают одной из частиц. Так, например,

$$(\psi_b^a)_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\psi_b^a)_\Lambda = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (\psi_b^a)_{\Sigma^-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (138,7)$$

Таким способом получим для масс частиц в барионном октете

$$\begin{aligned} m(\Xi) &= m_0 + \frac{2c_1 - c_2}{3}, & m(N) &= m_0 + \frac{2c_2 - c_1}{3}, \\ m(\Sigma) &= m_0 - \frac{c_1 + c_2}{3}, & m(\Lambda) &= m_0 + \frac{c_1 + c_2}{2} \end{aligned}$$

(m_0 — масса невозмущенного октета). Исключая постоянные m_0, c_1, c_2 , получим соотношение

$$\frac{1}{2} [m(\Xi) + m(N)] = \frac{1}{4} [m(\Sigma) + 3m(\Lambda)]. \quad (138,8)$$

Для мезонного октета $\bar{\psi}_b^a = \psi_a^b$ и произведения в двух членах в (138,6) совпадают. Положив $c_1 = c_2 = c$, получим

$$m(K) = m_0 + \frac{c}{3}, \quad m(\pi) = m_0 - \frac{2c}{3}, \quad m(\eta) = m_0 + \frac{2c}{3}.$$

Исключая c и m_0 , получим¹⁾

$$m(K) = \frac{1}{4} [m(\pi) + 3m(\eta)]. \quad (138,9)$$

¹⁾ Лучшее согласие с экспериментальными данными для мезонного октета получается, если заменить в этой формуле m на m^2 , т. е. считать, что средние значения оператора m_3^3 определяют изменения квадратов масс. В качестве обоснования можно указать, что физические величины (амплитуды рассеяния) являются функциями инварианта $p^2 = m^2$; поэтому более естественной величиной представляется m^2 , а не m . Для барионного октета $\Delta m \ll m_0$ и различие между обоими предположениями несущественно.

Для декуплета волновые функции ψ^{abc} — симметричный суперспинор только с верхними индексами. Поэтому в (138,3) остается лишь один член, и поправка к массе определяется выражением

$$\Delta m = 3c \bar{\psi}_{abd} (\lambda_3^3)_c^d \psi^{abc}$$

(где $\bar{\psi}_{abc} = \psi^{abc*}$). С помощью (137,12) найдем отсюда для масс $m(T)$ изомультиплетов, входящих в декаплет:

$$\begin{aligned} m(0) &= m_0 + 2c, & m(1/2) &= m_0 + c, \\ m(1) &= m_0, & m(3/2) &= m_0 - c. \end{aligned}$$

Исключив m_0 и c , получим

$$m(0) - m(1/2) = m(1/2) - m(1) = m(1) - m(3/2). \quad (138,10)$$

ГЛАВА XV

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА АДРОНОВ

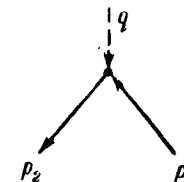
§ 139. Электромагнитные формфакторы адронов

Построение исчерпывающей электродинамики адронов в рамках существующей теории невозможно. Ясно, что нельзя составить уравнений, определяющих электромагнитные взаимодействия адронов без учета значительно более интенсивных сильных взаимодействий. Отсутствие же теории последних не позволяет установить и явный вид адронного тока, с помощью которого должны описываться взаимодействия в квантовой электродинамике. В этой ситуации приходится ограничиться введением адронного тока как феноменологической величины, структура которой устанавливается лишь исходя из общих кинематических требований, не связанных с какими-либо предположениями о динамике взаимодействий. Оператор же электромагнитного взаимодействия будет иметь по-прежнему вид

$$-e(\mathbf{J}A), \quad (139,1)$$

где теперь ток обозначен прописной буквой J (в отличие от электронного тока j). Поскольку порядок величины этого взаимодействия задается тем же элементарным зарядом e , то можно по-прежнему пользоваться методами теории возмущений.

Установим вид тока перехода между двумя состояниями свободно движущегося адрона (не сопровождающегося каким-либо превращением самого адрона). Этот ток входит в «треххвостку»



(139,2)

которая сама может входить как часть в какую-либо более сложную диаграмму (например, упругого рассеяния электрона на адроне). Пунктирная линия в диаграмме (139,2) изображает

виртуальный фотон; она не может отвечать реальному фотону, так как свободная частица не может поглотить (или испустить) такой фотон. При этом

$$q^2 = (p_2 - p_1)^2 < 0.$$

Рассмотрим сначала адрон со спином 0. Пусть u_1 и u_2 — волновые амплитуды начального и конечного состояний адрона, в которых он имеет 4-импульсы p_1 и p_2 ; для частицы со спином 0 эти амплитуды — скаляры (или псевдоскаляры)¹⁾. Адронный ток перехода J_{fi} между этими двумя состояниями должен быть билинеен по u_1 и u_2^* . Запишем его в виде

$$J_{fi} = u_2^* \Gamma u_1, \quad (139,3)$$

где 4-вектор Γ — неизвестный вершинный оператор (кружок на диаграмме (139,2)). Если положить $u_1 = u_2 = 1$, то будет просто $J_{fi} = \Gamma$.

Универсальным свойством тока в электродинамике, связанным с калибровочной инвариантностью теории, является его сохранение. В импульсном представлении оно выражается ортогональностью тока перехода 4-импульсу фотона $q = p_2 - p_1$:

$$qJ_{fi} = 0. \quad (139,4)$$

В данном случае это значит, что Γ должно иметь вид

$$\Gamma = PF(q^2), \quad (139,5)$$

где $P = p_1 + p_2$, а $F(q^2)$ — скалярная функция единственной инвариантной независимой переменной — квадрата q^2 . Поскольку род адрона при переходе не меняется, то $p_1^2 = p_2^2 = M^2$ (M — масса адрона), и потому $Pq = 0$.

Матричные элементы (139,3) с Γ из (139,5) (а с ними и сам оператор J) — истинные 4-векторы. Поэтому оператор взаимодействия (139,1) — истинный скаляр. Таким образом, электромагнитное взаимодействие адронов со спином 0 оказывается P -инвариантным автоматически. Оно оказывается также и T -инвариантным. Действительно, обращение времени, во-первых, переставляет начальный и конечный 4-импульсы; при этом сумма $P = p_1 + p_2$ не меняется. Во-вторых, обращение времени меняет знак пространственных компонент 4-импульсов, не меняя их

¹⁾ Напомним, что плоская волна записывается в виде $\psi = \frac{u}{\sqrt{2e}} e^{-ipx}$.

Нормировке на одну частицу в единичном объеме отвечает (для частиц со спином 0) нормировка скаляра согласно $u^*u = 1$; при этом можно положить просто $u = 1$ (§ 10). Мы определяем ниже ток перехода по отношению к амплитудам u_1, u_2 в соответствии со способом обозначений в § 65.

временных компонент; но таким же образом преобразуются и компоненты 4-потенциала A , так что произведение JA не меняется.

Инвариантную функцию $F(q^2)$ называют *электромагнитным формфактором* адрона. В рамках феноменологической теории ее вид, разумеется, не может быть установлен. Можно, однако, утверждать, что эта функция вещественна (в рассматриваемой области $q^2 < 0$). Это следует из тех же соображений, которые были применены в § 113 к формфакторам электрона: при $q^2 < 0$ во всяком случае отсутствуют промежуточные состояния, которые могли бы фигурировать в правой стороне соотношения унитарности; поэтому матрица M_{fi} , а с нею и J_{fi} оказываются эрмитовыми.

При $q = 0$ начальное и конечное состояния совпадают, так что J_{fi} становится диагональным матричным элементом. В частности, $e(J^0)_{ii}/2e_i = eF(0)$ есть плотность заряда, совпадающая (нормировка на 1 частицу в единичном объеме!) с полным зарядом частицы.

Для электрически нейтральной частицы $F(0) = 0$. Подчеркнем, однако, что это отнюдь не означает еще истинной нейтральности частицы. Если частица истинно нейтральна и обладает определенной зарядовой четностью, то $F(q^2) \equiv 0$ при всех q^2 : так как оператор тока зарядово-нечетен (§ 13), то его матричные элементы между двумя состояниями одного и того же адрона равны нулю¹⁾.

Перейдем к адронам со спином $1/2$. В этом случае волновые амплитуды u_1, u_2 — биспиноры и адронный ток имеет вид

$$J_{fi} = \bar{u}_2 \Gamma u_1. \quad (139,6)$$

Из билинейных комбинаций \bar{u}_2 и u_1 и 4-векторов p_1, p_2 можно составить как истинные 4-векторные, так и псевдовекторные величины (удовлетворяющие условию (139,4)). Поэтому условие P -инвариантности взаимодействия не удовлетворится автоматически и должно быть поставлено дополнительно²⁾. Как было показано в § 113, при этом условии вершинный оператор содержит два независимых вещественных (при $q^2 < 0$)

¹⁾ Это не означает, конечно, что такой адрон вообще не взаимодействует с электромагнитным полем. Произведение двух операторов тока, $J(x)J(x')$, уже зарядово-четно, и его матричные элементы отличны от нуля для переходов между состояниями с одинаковой зарядовой четностью. Поэтому истинно нейтральный адрон может рассеивать фотон, а также испускать одновременно два фотона, т. е. участвовать в процессах более высокого порядка по α .

²⁾ Существующие экспериментальные данные не обнаруживают нарушений сохранения пространственной четности в электромагнитных взаимодействиях адронов.

формфактора. Запишем его теперь в виде

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= 2M(F_e - F_m) \frac{P^\mu}{P^2} + F_m \gamma^\mu = 2M \left(F_e - \frac{q^2}{4M^2} F_m \right) \frac{P^\mu}{P^2} - \frac{F_m}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu = \\ &= (4M^2 F_e - q^2 F_m) \frac{\gamma^\mu}{P^2} + \frac{2M}{P^2} (F_e - F_m) \sigma^{\mu\nu} q_\nu, \quad (139,7) \end{aligned}$$

где $F_e(q^2)$ и $F_m(q^2)$ — инвариантные формфакторы (M — масса адрона); в эквивалентности трех написанных выражений легко убедиться с помощью равенств $P^2 + q^2 = 4M^2$ и (113,5) ¹⁾.

Электромагнитные формфакторы относятся к категории инвариантных амплитуд, понятие о которых было введено в § 71. Их можно рассматривать как амплитуды «реакции», представляющей собой (в своем аннигиляционном канале) распад виртуального фотона на адрон и антиадрон. Виртуальный фотон — «частица» со спином 1. В том, что ее распад на две частицы со спином $1/2$ должен описываться двумя независимыми амплитудами, легко убедиться и подсчетом соответствующих спиральных амплитуд $\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle$ (см. § 70). Действительно, в силу P -инвариантности четыре отличных от нуля элемента S -матрицы попарно равны друг другу:

$$\begin{aligned} \langle 1/2 \ 1/2 | S^1 | 1 \rangle &= \langle -1/2 \ -1/2 | S^1 | -1 \rangle, \\ \langle 1/2 \ -1/2 | S^1 | 0 \rangle &= \langle -1/2 \ 1/2 | S^1 | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Требование T -инвариантности (или C -инвариантности — в аннигиляционном канале) не добавляет новых связей между этими элементами. С этим обстоятельством связан тот факт, что взаимодействие, описываемое вершинным оператором (139,7), автоматически оказывается также и T -инвариантным (такая ситуация, однако, не имеет уже места для частиц с более высокими спинами).

При $q \rightarrow 0$ члены нулевого и первого (по q) порядка в (139,7):

$$\Gamma^\mu = F_e(0) \gamma^\mu - \frac{1}{2M} [F_m(0) - F_e(0)] \sigma^{\mu\nu} q_\nu. \quad (139,8)$$

¹⁾ Целесообразность определения формфакторов согласно (139,7) (*R. Sachs*, 1962) выяснится ниже. В литературе используются также формфакторы F_1 , F_2 , определенные аналогично f и g в (113,6), т. е. согласно

$$\Gamma^\mu = F_1 \gamma^\mu - \frac{F_2}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu.$$

Они связаны с F_e , F_m соотношениями

$$F_e = F_1 + F_2 \frac{q^2}{4M^2}, \quad F_m = F_1 + F_2.$$

Отсюда видно (см. § 113), что $F_e(0)$ — электрический заряд частицы (в единицах e), а $F_m(0) - F_e(0)$ — ее аномальный магнитный момент (в единицах $e/2M$) ¹⁾.

До сих пор мы пользовались только формфакторами в импульсном пространстве. Этого, разумеется, достаточно для описания наблюдаемых явлений. С чисто иллюстративной целью, однако, можно дать формфакторам и несколько более наглядную интерпретацию, рассматривая их как фурье-образы некоторых функций от координат.

Для этого удобно выбрать систему отсчета, в которой $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ (так называемая *система Брейта*); это всегда возможно, поскольку $P^2 > 4M^2 > 0$. В этой системе $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon$, так что $P^0 = 2\varepsilon$, а составляющие 4-вектора q равны $q^0 = 0$, $\mathbf{q} = 2\mathbf{p}_2 = -2\mathbf{p}_1$.

Для адрона со спином 0 ток перехода принимает в системе Брейта в особенности простую форму:

$$\frac{J_{fi}^0}{2\varepsilon} = F(-q^2), \quad \mathbf{J} = 0.$$

Отсюда видно, что $F(-q^2)$ можно истолковать как фурье-образ статического распределения зарядов с плотностью

$$\rho(\mathbf{r}) = e \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(-q^2) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3q. \quad (139,9)$$

В этом смысле говорят о пространственной электромагнитной структуре частицы: при $F = \text{const} = 1$ было бы $\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r})$; зависимость же формфактора от \mathbf{q} интерпретируется как отклонение распределения заряда от точечного. Подчеркнем, однако, что этой интерпретации не следует придавать буквального смысла. Функция $\rho(\mathbf{r})$ вообще не относится к какой-либо определенной системе отсчета, так как каждому значению \mathbf{q} отвечает своя система.

Лишь в нерелятивистском пределе малых $q^2 \ll M^2$, когда изменением энергии частицы при рассеянии можно пренебречь, система Брейта совпадает с системой покоя частицы и не зависит от \mathbf{q} . Начальные и конечные состояния частицы в этом приближении одинаковы, так что ток перехода становится диагональным матричным элементом и функция $\rho(\mathbf{r})$ приобретает реальный смысл пространственного распределения зарядов. Для элементарных частиц, однако, характерные значения $|\mathbf{q}|$, на которых существенно меняются формфакторы, лишь немногим меньше M . Поэтому в нерелятивистском пределе для них можно вообще заменить $F(-q^2)$ на $F(0)$, т. е. рассматривать частицу

¹⁾ Так, для протона $F_e(0) = 1$, $F_m(0) - F_e(0) = 1,793$. Для нейтрона $F_e(0) = 0$, $F_m(0) = -1,913$ (магнитный момент целиком «аномален»).

как точечную. Иная ситуация для ядер. Масса ядра M пропорциональна числу A нуклонов в нем, а характерное значение $|q| \sim 1/R$, т. е. пропорционально $A^{-1/3}$ (R — радиус ядра). Поэтому для достаточно тяжелых ядер характерные $q^2 \ll M^2$, и, таким образом, нерелятивистское рассмотрение допустимо во всем существенном интервале; тем самым понятие электромагнитной структуры ядра приобретает вполне определенный смысл.

Для частицы со спином $1/2$ из (139,7) получим в системе Брейта

$$J_{fi}^0 = (F_e - F_m) \frac{M}{e} (\bar{u}_2 u_1) + F_m (\bar{u}_2 \gamma^0 u_1) = F_e (\bar{u}_2 \gamma^0 u_1), \quad (139,10)$$

$$J_{fi} = \frac{1}{2M} F_m [i\mathbf{q} \cdot (\bar{u}_2 \boldsymbol{\Sigma} u_1)], \quad (139,11)$$

где $\boldsymbol{\Sigma}$ — трехмерный оператор (матрица) спина (21,21), а в (139,10) использовано равенство

$$e (\bar{u}_2 \gamma^0 u_1) = M (\bar{u}_2 u_1),$$

которое легко проверить с помощью уравнений Дирака для u_1 и \bar{u}_2 при $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$.

Временная компонента тока перехода (139,10) отличается от выражения для «точечной частицы» — электрона множителем $F_e(-q^2)$. Поэтому можно сказать, что формфактор F_e (его называют *зарядовым*) описывает «пространственное распределение заряда» согласно (139,9).

Аналогичным образом трехмерному вектору (139,11) можно привести в соответствие «пространственное распределение» плотности токов $e\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \text{rot } \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})$, где

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2M} \boldsymbol{\Sigma} \int F_m(-q^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3q$$

представляет собой «плотность магнитного момента». Таким образом, формфактор F_m (его называют *магнитным*) можно интерпретировать как плотность пространственного распределения магнитного момента — разумеется, с теми же оговорками, которые были сделаны выше по поводу распределения заряда. При этом F_m включает в себя как «нормальный» дираковский магнитный момент, так и специфический для адрона «аномальный» момент; «плотности» последнего отвечает разность $F_m - F_e$.

Естественно считать, что особые точки адронных электромагнитных формфакторов, как и электронных, лежат при вещественных положительных значениях аргумента $t = q^2 = -q^2$. Это позволяет сделать определенные заключения об асимптотическом поведении распределения $\rho(r)$ (и $\boldsymbol{\mu}(r)$) при $r \rightarrow \infty$. Именно, такое же преобразование интеграла (139,9), которое было применено в § 111 для перехода от (111,3) к (111,4), приведет

к результату, что при больших r будет

$$\rho(r) \propto e^{-\kappa_0 r},$$

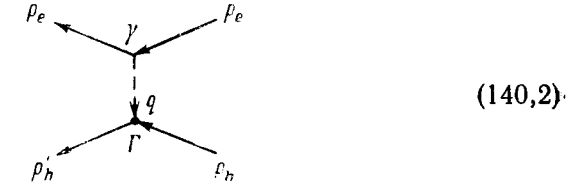
где κ_0^2 — абсцисса первой особой точки формфактора $F(q^2)$ (ср. также примечание на стр. 66). Если, как это обычно бывает, ближайшая особенность дается порогом образования виртуальным фотоном пары адронов (с массой M_0 у каждого), то $\kappa_0 = 2M_0$.

§ 140. Рассеяние электронов адронами

Применим полученные в предыдущем параграфе формулы к упругому рассеянию электрона на адроне. Обозначим начальный и конечный 4-импульсы адрона через p_h и p'_h , а 4-импульсы электрона — через p_e и p'_e ; при этом

$$p_e + p_h = p'_e + p'_h. \quad (140,1)$$

Рассматриваемый процесс изображается диаграммой



Испусканию виртуального фотона электроном отвечает обычный вершинный оператор γ ; поглощению его адроном — оператор Γ .

Рассмотрим наиболее интересный случай адрона со спином $1/2$ (например, рассеяние электрона протоном или нейтроном).

Диаграмме (140,2) соответствует амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = 4\pi e^2 \frac{1}{q^2} (\bar{u}'_e \gamma^\mu u_e) (\bar{u}'_h \Gamma_\mu u_h). \quad (140,3)$$

Вычисление сечения по этой амплитуде не представляет принципиальных отличий от произведенных в § 82 вычислений; при этом оператор Γ удобно писать в виде первого из выражений (139,7).

Для рассеяния неполяризованных частиц получается следующий результат:

$$d\sigma = \frac{\pi \alpha^2 dt}{[s - (M + m)^2][s - (M - m)^2] t^2 \left(1 - \frac{t}{4M^2}\right)} \times \\ \times \left\{ F_e^2 [(s - u)^2 + (4M^2 - t)t] - \frac{t}{4M^2} F_m^2 [(s - u)^2 - (4M^2 - t)(4m^2 + t)] \right\}. \quad (140,4)$$

Здесь M — масса адрона, m — масса электрона,

$$s = (p_e + p_h)^2, \quad t = q^2 = (p_e - p_e')^2, \quad u = (p_e - p_h')^2, \\ s + t + u = 2m^2 + 2M^2.$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи.

Для рассеяния электронов на тяжелом ядре представляет интерес случай, когда передача импульса электроном ядру $|q|$ мала по сравнению с массой ядра, но не мала по сравнению с $1/R$ (R — радиус ядра), так что ядро нельзя рассматривать как точечное. В таком случае система центра инерции приближенно совпадает с системой покоя ядра, отдачей ядра можно пренебречь и энергия электрона не меняется. При этом

$$-t = q^2 \ll M^2, \quad \pi |dt| = p_e^2 d\theta_e', \\ s - M^2 \approx M^2 - u \approx 2M\epsilon_e$$

и формула (140,4) принимает вид

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 d\theta_e'}{q^4} (4\epsilon_e^2 - q^2) F_e^2(-q^2). \quad (140,5)$$

В этом приближении в сечении остается лишь член с электрическим формфактором и (140,5) соответствует формуле (81,5), справедливой для рассеяния электрона на статическом распределении зарядов.

При рассеянии электрона на неподвижном нейтроне в том же предельном случае $\epsilon_e \ll M$ (M — масса нейтрона) формфакторы можно заменить их значениями при $q = 0$, поскольку, как уже отмечалось, для отдельного нуклона характерный «радиус» распределения зарядов сравним с $1/M^1$). В силу электрической нейтральности нейтрона $F_e(0) = 0$, и сечение принимает вид

$$d\sigma = \alpha\mu^2 \left[\frac{4(\epsilon_e^2 - m^2)}{q^2} + 1 \right] d\theta_e' = \alpha\mu^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + 1 \right) d\theta_e', \quad (140,6)$$

где $\mu = \frac{e}{2M} F_m(0)$ — магнитный момент нейтрона, θ — угол рассеяния. Эта формула отвечает рассеянию электрона на неподвижном точечном магнитном моменте.

Наконец, напишем формулу для сечения рассеяния ультрарелятивистского электрона на нуклоне при $|q| \gg m$. Под q^2 мы по-прежнему понимаем квадрат передачи импульса в системе центра инерции, так что инвариант $t = -q^2$. В системе же

¹⁾ Эмпирическое значение среднеквадратичного «радиуса» нуклона $\approx 3,5/M \approx 1/2m_\pi$ (m_π — масса пиона).

покоя начального нуклона (лабораторная система) имеем

$$-t \approx 2(p_e p_e') = 2\epsilon_e \epsilon_e' (1 - \cos \theta),$$

где ϵ_e, ϵ_e' — начальная и конечная энергия электрона, а θ — угол рассеяния в этой системе. В ультрарелятивистском случае ϵ_e' связана с θ той же формулой, что и при рассеянии фотона (ср. (86,8)):

$$\frac{1}{\epsilon_e'} - \frac{1}{\epsilon_e} = \frac{1}{M} (1 - \cos \theta).$$

Поэтому имеем

$$-t = \frac{4\epsilon_e^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2\epsilon_e}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (140,7)$$

$$\pi d|t| = \frac{\epsilon_e^2 d\theta_e'}{\left(1 + \frac{2\epsilon_e}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2} = \epsilon_e^2 \left(1 - \frac{q^2}{2\epsilon_e M}\right)^2 d\theta_e', \quad (140,8)$$

где $d\theta_e' = 2\pi \sin \theta d\theta$. В формуле (140,4) можно везде опустить массу электрона m ; выразив все величины через t и $s - M^2 = 2M\epsilon_e$, получим

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2 d|t|}{\epsilon_e^2 t^2} \left\{ F_e^2(t) \left[\frac{(4M\epsilon_e + t)^2}{4M^2 - t} + t \right] - \frac{t}{4M^2} F_m^2(t) \left[\frac{(4M\epsilon_e + t)^2}{4M^2 - t} - t \right] \right\}, \quad (140,9)$$

или, используя (140,7–8),

$$d\sigma = d\theta_e' \frac{\alpha^2}{4\epsilon_e^2} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2\epsilon_e}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left\{ \frac{F_e^2 - \frac{t}{4M^2} F_m^2}{1 - \frac{t}{4M^2}} - \frac{t}{2M^2} F_m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (140,10)$$

(*M. Rosenbluth*, 1950).

Обратим внимание на то, что формфакторы F_e и F_m дают независимый вклад в сечение, интерференционные члены между ними отсутствуют. Это оправдывает целесообразность сделанного выбора формфакторов.

Задача

Найти сечение рассеяния электрона на адроне со спином 0. Решение. Используя (139,5), имеем вместо (140,3)

$$M_{ft} = \frac{4\pi e^2}{q^2} (\hat{u}' \hat{p}_h \mu_e) F(q^2).$$

Для сечения получается

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2 dt [(s-u)^2 + (4M^2-t)t]}{[s-(M+m)^2][s-(M-m)^2]t^2} F^2(t)$$

(обозначения те же, что и в (140,4). При $|t| \gg m^2$

$$d\sigma = d\sigma'_e \frac{\alpha^2}{4t_e^2} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{F^2(t)}{1 + \frac{2e_e}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

(обозначения те же, что и в (140,10)).

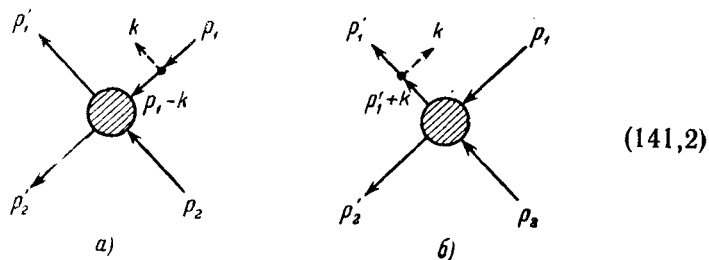
§ 141. Низкоэнергетическая теорема для тормозного излучения

В § 95 был исследован процесс испускания фотона при столкновении частиц в пределе, когда частота фотона стремится к нулю. Оказалось, что амплитуда процесса обратно пропорциональна ω и простым образом выражается через амплитуду того же столкновения без испускания мягкого фотона (об этой последней мы будем ниже говорить условно как об амплитуде «упругого» рассеяния и обозначать ее как $M_{fi}^{(yn)}$ ¹⁾). В следующем по ω приближении будет

$$M_{fi} = M_{fi}^{(-1)} + M_{fi}^{(0)}, \quad (141,1)$$

где к главному члену ($\propto \omega^{-1}$) добавляется не зависящий от ω ($\propto \omega^0$) поправочный член. Мы увидим, что и этот поправочный (как и главный) член тоже может быть выражен через $M_{fi}^{(yn)}$, причем независимо от (неизвестных нам) деталей электромагнитной структуры адрона. Это утверждение называют *низкоэнергетической теоремой* для тормозного излучения (F. E. Low, 1958).

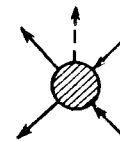
Мы видели в § 95, что основной вклад в амплитуду испускания мягкого фотона (отвечающий первому члену в (141,1)) возникает от диаграмм, в которых фотон излучается непосредственно начальной или конечной частицей. Это — диаграммы вида



(141,2)

¹⁾ В § 95 она обозначалась как $M_{fi}^{(0)}$.

в противоположность диаграммам вида



(141,3)

б)

в которых фотонная линия выходит из внутренних частей диаграммы. Для графиков (141,2) характерно, что они могут быть рассеяны на две части путем пересечения одной линии виртуального адрона (начального или конечного). Другими словами, они иллюстрируют существенное в данном аспекте свойство: наличие одночастичного промежуточного состояния с одним адроном. Мы видели в § 80, что в силу требований унитарности это свойство уже само по себе приводит к появлению полюсной особенности в амплитуде.

Адроны со спином 0

Предположим для простоты, что из двух сталкивающихся адронов электрически заряжен (и потому может излучать) лишь один (первый) и что оба адрона не имеют спина. Волновые амплитуды u таких адронов — скаляры, которые полагаем равными 1.

Тогда вклад в амплитуду от полюсной части диаграммы (141,2а) имеет вид

$$iM_{fi}^{(a)} = \sqrt{4\pi} e_\mu^* (2p_1^\mu - k^\mu) Z_1 e F \frac{1}{(p_1 - k)^2 - M^2} i\Gamma. \quad (141,4)$$

Первый множитель отвечает фотону k (e_μ — его 4-вектор поляризации). Второй множитель отвечает электромагнитной адронной вершине (жирная точка на диаграмме); она записана в форме (139,5), причем $Z_1 e$ — заряд адрона, а F — его формфактор. Третий множитель — пропагатор виртуального адрона $p_1 - k$ (M — его масса). Наконец, множитель $i\Gamma$ обозначает весь остальной блок. Последний отличается от амплитуды «упругого» процесса

$$iM_{fi}^{(yn)} = \quad (141,5)$$

заменой реального адрона p_1 виртуальным $p_1 - k$.

Среди первых членов разложения выражения (141,4) по степеням ω будут члены: 1) обратно пропорциональные ω , 2) не зависящие от ω , но зависящие от направления k , 3) не зависящие от ω , k вовсе. Члены третьего (и только такого) рода возникнут также от «неособых» диаграмм — диаграмм вида (141,3), не содержащих полюсной особенности, и от неполюсных частей диаграмм (141,2). Мы увидим, что все такие члены вместе однозначно определяются по членам первых двух типов условием калибровочной инвариантности и потому не требуют специального вычисления.

Амплитуда «упругого» процесса (141,5) зависит лишь от двух инвариантных переменных:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2, \\ t &= (p'_2 - p_2)^2. \end{aligned} \quad (141,6)$$

Замена p_1 на $p_1 - k$ не только превращает s в $(p_1 - k + p_2)^2$, но вводит еще и зависимость от новой переменной

$$(p_1 - k)^2 - M^2 = -2p_1 k,$$

характеризующей «нефизичность» импульса $p_1 - k$. Но уже первый член разложения по этой новой (малой) переменной устраняет особенность в амплитуде (141,4) и потому может дать в ней лишь не зависящие от k члены, которые, согласно сказанному выше, нас пока не интересуют. Таким образом, мы приходим к важному заключению, что вместо величины Γ в (141,4) можно подставить физическую амплитуду $M_{fi}^{(yn)}(s, t)$, заменив лишь в ней

$$s \rightarrow (p_1 + p_2 - k)^2 = s - 2k(p_1 + p_2). \quad (141,7)$$

Первые члены ее разложения:

$$\Gamma \rightarrow M_{fi}^{(yn)}(s, t) - 2(kp_1 + kp_2) \left(\frac{\partial M_{fi}^{(yn)}}{\partial s} \right)_t.$$

По такой же причине несуществен тот факт, что электромагнитный формфактор F относится здесь к вершине, в которой из двух адронных концов (p_1 и $p_1 - k$) лишь один физический. Его можно поэтому заменить рассмотренным в § 139 формфактором вершины с двумя физическими концами, а поскольку фотон k в данном случае реальный, то $F(k^2) = F(0) = 1$.

Таким образом, находим из (141,4)

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(a)} &= Z_1 e \sqrt{4\pi} \frac{2(e^* p_1)}{-2(kp_1)} - \\ &- Z_1 e \sqrt{4\pi} 2(e^* p_1) \frac{1}{-2(kp_1)} 2(p_2 k) \frac{\partial M_{fi}^{(yn)}}{\partial s} + \dots, \end{aligned} \quad (141,8)$$

где многоточие означает члены, не зависящие от k вовсе (между тем как второй член в (141,8) зависит от направления k). Аналогичным образом найдем, что вклад в M_{fi} от диаграммы (141,2, б) отличается от (141,8) заменой p_1, p_2, k на $p'_1, p'_2, -k$. Для главного члена разложения получим в результате известное уже нам выражение

$$M_{fi}^{(-1)} = Z_1 e \sqrt{4\pi} \left(\frac{p'_1 e^*}{p'_1 k} - \frac{p_1 e^*}{p_1 k} \right) M_{fi}^{(yn)} \quad (141,9)$$

(ср. (95,5)).

Не зависящие же от k члены можно определить из требования, чтобы амплитуда в целом была калибровочно-инвариантна. Именно, она не должна меняться при замене $e^* \rightarrow e^* + \text{const} \cdot k$, т. е. должна иметь вид $M_{fi} = e_\mu^* J^\mu$, причем $k_\mu J^\mu = 0$. Легко видеть, что для этого нужно добавить к (141,8) не зависящий от k член

$$-2Z_1 e \sqrt{4\pi} (p_2 e^*),$$

и аналогично для диаграммы (141,2, б). В результате получим окончательно

$$M_{fi}^{(0)} = 2Z_1 e \sqrt{4\pi} e_\mu^* \left[p_1^\mu \frac{(p_2 k)}{(p_1 k)} - p_2^\mu + p_1'^\mu \frac{(p_2' k)}{(p_1' k)} - p_2'^\mu \right] \frac{\partial M_{fi}^{(yn)}}{\partial s}. \quad (141,10)$$

Эта формула решает поставленную задачу. Ее можно представить в более компактном виде, заменив тождественно

$$2p_{2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial p_1^\nu} \right)_{p'_1, p_2, p'_2}$$

(и аналогично для $\partial/\partial p'_1$) и введя дифференциальные операторы

$$d_{1\mu} = \frac{p_{1\mu}}{(p_1 k)} k^\nu \frac{\partial}{\partial p_1^\nu} - \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \quad (141,11)$$

(и аналогично $d'_{1\mu}$). Тогда ¹⁾

$$M_{fi}^{(0)} = Z_1 e \sqrt{4\pi} e_\mu^* (d_1^\mu + d_1'^\mu) M_{fi}^{(yn)}. \quad (141,12)$$

Сечение определяется квадратом $|M_{fi}|^2$; с требуемой точностью

$$|M_{fi}|^2 = |M_{fi}^{(-1)}|^2 + 2 \text{Re}(M_{fi}^{(-1)} M_{fi}^{(0)*}). \quad (141,13)$$

¹⁾ Обобщение этой формулы на столкновение с участием любого числа заряженных частиц достигается заменой $Z_1(d_1 + d_1')$ аналогичной суммой по всем начальным и конечным частицам.

Второй член дает искомую поправку к сечению излучения. Просуммировав по поляризациям фотона, получим для этой поправки следующее выражение:

$$-4\pi (Z_1 e)^2 \left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right)^\mu (d'_1 + d_1)_\mu |M_{fi}^{(ym)}|^2. \quad (141,14)$$

Таким образом, поправка к сечению излучения выражается через сечение «упругого» процесса и его производную по s .

Адроны со спином $1/2$

Пусть теперь заряженный адрон имеет спин $1/2$. Вся принципиальная сторона вычислений остается прежней. Меняется лишь конкретный вид вершин и пропагаторов.

В качестве электромагнитного вершинного оператора надо взять выражение (139,7), которое при $k^2 \rightarrow 0$ и при исходящей линии фотона сводится к

$$Z_1 e \gamma^\mu + \mu_{ан} \sigma^{\mu\nu} k_\nu, \quad (141,15)$$

где $\mu_{ан}$ — аномальная часть магнитного момента адрона (ср. (139,8)). Вершинный же оператор Γ , связанный с амплитудой «упругого» процесса, определяется согласно

$$iM_{fi}^{(ym)} = \bar{u}' i \Gamma u_1, \quad (141,16)$$

где $u_1 = u(p_1)$, $u'_1 = u(p'_1)$ — биспинорные амплитуды начального и конечного адронов. Его зависимость от 4-импульсов частиц может быть представлена в виде

$$\Gamma = f_1(s, t) + (\hat{p}_2 + \hat{p}'_2) f_2(s, t), \quad (141,17)$$

где f_1, f_2 — инвариантные амплитуды (ср. (71,3)).

Тогда вклад, например, диаграммы (141,2, а) в амплитуду процесса будет

$$M_{fi}^{(a)} = \bar{u}'_1 \Gamma \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + M}{-2(p_1 k)} \sqrt{4\pi} (Z_1 e \hat{e}^* + \mu_{ан} \sigma^{\mu\nu} e^*_{\mu} k_\nu) u_1,$$

причем в Γ аргумент s должен быть заменен согласно (141,7).

Опустив простые вычисления, приведем их окончательный результат:

$$M_{fi}^{(a)} = \sqrt{4\pi} Z_1 e \bar{u}'_1 \left[(d'_1 + d_1) \Gamma + \frac{\hat{e}^* k}{2(p'_1 k)} \Gamma + \Gamma \frac{\hat{k} e^*}{2(p_1 k)} \right] u_1 - \\ - \sqrt{4\pi} \mu_{ан} \bar{u}'_1 \left[\frac{\sigma^{\mu\nu} e^*_{\mu} k_\nu M - \hat{k} (p'_1 e^*) + \hat{e}^* (p'_1 k)}{(p'_1 k)} \Gamma - \right. \\ \left. - \Gamma \frac{\sigma^{\mu\nu} e^*_{\mu} k_\nu M + \hat{k} (p_1 e^*) - \hat{e}^* (p_1 k)}{(p_1 k)} \right] u_1. \quad (141,18)$$

В поправку к сечению $M_{fi}^{(0)}$ входит согласно (141,13) линейно. Очевидно, что магнитный момент $\mu_{ан}$ может при этом войти в ответ лишь в виде $\mu_{ан} \xi_1$ или $\mu_{ан} \xi_2$, где ξ — вектор поляризации адронов. Поэтому при усреднении по поляризациям адронов вся эта часть поправки выпадает. Если же произвести усреднение также и по поляризациям фотона, то после простых преобразований оказывается, что по-прежнему справедлива формула (141,14), выражающая поправку к сечению излучения через сечение «упругого» рассеяния (Т. N. Burnett, N. M. Kroll, 1968).

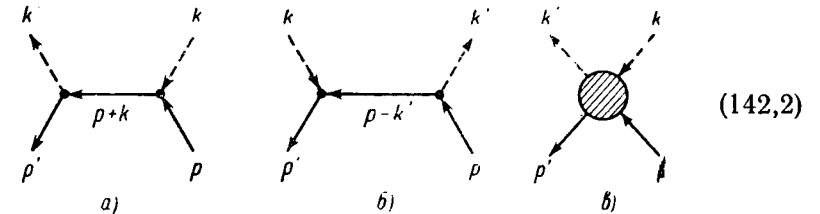
§ 142. Низкоэнергетическая теорема для рассеяния фотона на адроне

В пределе малых частот сечение рассеяния фотона на всякой неподвижной заряженной частице стремится к своему классическому значению, даваемому формулой Томсона. Этому пределу соответствует не зависящая от частоты фотона ω амплитуда, которую обозначим через $M_{fi}^{(0)}$. Оказывается, однако, что и для рассеяния фотона (как и для рассмотренного в предыдущем параграфе тормозного излучения) не зависит от деталей электромагнитной структуры адрона не только этот первый, но и следующий член разложения амплитуды по степеням ω :

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} + M_{fi}^{(1)}, \quad (142,1)$$

где $M^{(1)} \sim \omega$ (F. E. Low, 1954; M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, 1954).

Рассматриваемый процесс изображается диаграммами трех видов:



из которых первые два снова характеризуются наличием одночастичного промежуточного состояния и потому обладают полной особенностью.

Вся аргументация и принципиальная сторона вычислений остаются теми же, что и в § 141. Достаточно фактически вычислить лишь вклад от полюсных частей диаграмм (142,2, а—б), причем электромагнитные вершины в них выражаются через статические формфакторы (заряд Ze и аномальный магнитный момент $\mu_{ан}$) согласно (141,15).

Однако, в отличие от случая тормозного излучения, интересующие нас теперь поправки к сечению комптон-эффекта существуют лишь для частиц со спином. Дело в том, что в случае тормозного излучения кроме поправок, связанных со спином, имеются также поправки, связанные с энергетической зависимостью амплитуды «упругого» процесса. Но в данном случае роль последней играют формфакторы, которые для «физических концов» сводятся к постоянным и от энергии не зависят. Поэтому для рассеяния фотона поправки возникают только за счет магнитного момента, отсутствующего у частиц без спина. Ниже мы рассматриваем рассеяние фотона на адроне со спином $1/2$.

Понимая под M_{fi} вклад в амплитуду рассеяния от полюсных диаграмм, имеем (ср. (86,3—4))

$$M_{fi} = -4\pi (Ze)^2 e_\mu^* e_\nu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u), \quad (142,3)$$

где

$$Q^{\mu\nu} = (\gamma^\mu + S'^\mu) \frac{\hat{p} + \hat{k} + M}{s - M^2} (\gamma^\nu - S^\nu) + (\gamma^\nu - S^\nu) \frac{\hat{p} - \hat{k}' + M}{u - M^2} (\gamma^\mu + S'^\mu), \quad (142,4)$$

$$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2, \quad u = (p - k')^2 = (p' - k)^2$$

и для краткости введены обозначения

$$\mu_{\text{ан}} \sigma^{\mu\lambda} k_\lambda = ZeS^\mu, \quad \mu_{\text{ан}} \sigma^{\mu\lambda} k'_\lambda = ZeS'^\mu. \quad (142,5)$$

Переставляя операторы $\hat{p} + M$ и учитывая уравнения $\bar{u}'(\hat{p}' - M) = (\hat{p} - M)u = 0$, можно преобразовать это выражение к виду:

$$Q^{\mu\nu} = \left[(\gamma^\mu + S'^\mu) \frac{\hat{k}\gamma^\nu + 2p^\nu}{2pk} + \frac{\gamma^\nu \hat{k} - 2p'^\nu}{2p'k} (\gamma^\mu + S'^\mu) \right] - \left[\frac{\gamma^\mu \hat{k}' + 2p'^\mu}{2p'k'} S^\nu + S^\nu \frac{\gamma^\mu \hat{k}' - 2p'^\mu}{2pk'} \right] - \left[S'^\mu \frac{\hat{p} + \hat{k} + M}{2pk} S^\nu - S^\nu \frac{\hat{p} - \hat{k}' + M}{2pk'} S'^\mu \right]. \quad (142,6)$$

Такая форма записи (и аналогичная с переставленными k и k') делает очевидной калибровочную инвариантность выражения (142,3), условием которой являются равенства

$$k'_\mu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u) = (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u) k_\nu = 0 \quad (142,7)$$

(при проверке надо помнить, что $\hat{k}\hat{k} = 0$, $kS = k'S' = 0$).

Поскольку полюсная часть амплитуды рассеяния оказывается, таким образом, калибровочно-инвариантной уже сама по себе, то должна быть инвариантной сама по себе также и регулярная часть амплитуды (включающая в себя и вклад диаграмм

мы (142,2, в)). Отсюда в свою очередь следует, что разложение этой части по степеням k и k' должно начинаться с квадратичных членов (ср. аналогичное замечание в связи с условием (124,5)). Другими словами, регулярная часть амплитуды содержит лишь члены, начиная с пропорциональных $\omega' \sim \omega^2$, т. е. не дает никакого вклада в интересующие нас члены, пропорциональные ω^0 и ω^1 . Все последние содержатся, следовательно, в выражении (142,3).

Для их фактического вычисления выбираем лабораторную систему отсчета, в которой покоится начальный электрон. Для фотонов же выбираем трехмерно-поперечную калибровку, в которой $e_0 = e'_0 = 0$. Тогда $pe = 0$, $p'e'^* \sim |\mathbf{p}'| \sim \omega$, и из (142,6) сразу видно, что первые члены разложения M_{fi} будут пропорциональны ω^0 , а члены, содержащие $\mu_{\text{ан}}$, дадут вклад лишь в члены, пропорциональные ω^1 .

Волновые амплитуды начального и конечного электронов в лабораторной системе отсчета с нужной точностью имеют вид

$$u = \sqrt{2M} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}' = \sqrt{2M} \left(\omega'^*, -\frac{\omega'^*}{2M} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \sigma \right),$$

где ω, ω' — трехмерные спиноры.

Прямое вычисление приводит к следующему результату:

$$M_{fi}^{(0)} = -8\pi (Ze)^2 (e'^* e) (\omega'^* \omega), \quad (142,8)$$

$$M_{fi}^{(1)} = -16\pi i M \mu_{\text{ан}}^2 \omega (\omega'^* \sigma \omega) \{ [n' e'^*] [ne] \} - 4\pi i Ze \mu_{\text{ан}} \omega (\omega'^* \sigma \omega) \{ n ([ne] e'^*) + [ne] (ne'^*) - n' ([n' e'^*] e) - [n' e'^*] (ne) - 2[e'^* e] \} \quad (142,9)$$

(где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/\omega'$).

Сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{\omega'^2}{M^2 \omega^2} d\Omega' \quad (142,10)$$

(см. (65,19)). Для рассеяния на заряженной частице отличны от нуля как $M_{fi}^{(1)}$, так и $M_{fi}^{(0)}$. Принятая точность допускает при этом сохранение в квадрате $|M_{fi}|^2$ членов $|M_{fi}^{(0)}|^2$ и $\text{Re}(M_{fi}^{(0)} M_{fi}^{(1)*})$. Первый дает томсоновское сечение. Второй же обращается в нуль при усреднении по поляризациям фотонов и электронов. Поэтому при рассеянии на заряженном адроне рассматриваемые поправки проявляются только в поляризационных эффектах.

Для рассеяния же на электрически нейтральном адроне $M_{fi}^{(0)} = 0$ и сечение определяется квадратом $|M_{fi}^{(1)}|^2$. После усреднения по поляризациям конечных и суммирования по поляризациям начальных частиц оно оказывается равным

(в обычных единицах)

$$d\sigma = \frac{2\mu^4\omega^2}{\hbar^2 c^4} (2 + \sin^2 \vartheta) d\vartheta', \quad (142,11)$$

где ϑ — угол рассеяния фотона, а аномальный магнитный момент совпадает с полным моментом μ . Отметим, что по своей угловой зависимости это сечение соответствует случаю антисимметрического рассеяния (см. задачу 2 § 61).

§ 143. Мультипольные моменты адронов

Рассмотрим теперь ток перехода, соответствующий такой же, как (139,2), диаграмме



(143,1)

в которой, однако, линии p_1 и p_2 отвечают различным частицам (массы M_1 и M_2); фотонную линию $k = p_1 - p_2$ будет удобнее представлять здесь исходящей из вершины. При этом фотон может быть теперь как виртуальным, так и реальным: должно быть лишь $k^2 < (M_1 - M_2)^2$, так что значение $k^2 = 0$ допустимо. Таким образом, применения рассматриваемой диаграммы включают в себя, в частности, процессы испускания фотона при превращениях частиц, в том числе ядер (в последнем случае начальной и конечной частицами является ядро в различных состояниях).

В связи с поставленным вопросом наиболее интересен случай, когда длина волны фотона велика по сравнению с характерными «размерами» частицы (т. е. размерами, входящими в ее формфакторы; для ядра они совпадают, конечно, с его «радиусом»). Тогда ток перехода может быть разложен по степеням k^1 .

Отметим прежде всего, что должно быть

$$J_{fi} = 0 \quad \text{при} \quad k = 0. \quad (143,2)$$

Действительно, пределу $k \rightarrow 0$ отвечает постоянный в пространстве и времени потенциал. Но такой потенциал не имеет физического значения и не может являться причиной каких-либо реальных процессов. К этому же выводу можно подойти и с более формальной точки зрения: рассмотренные в § 139 токи были от-

¹⁾ Ниже мы следуем методике, принадлежащей В. Б. Берестецкому (1948).

личны от нуля при $k = 0$ за счет членов, пропорциональных 4-вектору $P = p_1 + p_2$; но при $M_1 \neq M_2$ произведение $Pk \neq 0$, так что такие члены запрещены условием поперечности тока.

Запишем условие поперечности тока $J_{fi} = (\rho_{fi}, \mathbf{J}_{fi})$ в трехмерном виде:

$$k\mathbf{J}_{fi} = \omega\rho_{fi}. \quad (143,3)$$

Этому условию можно удовлетворить двумя способами:

$$\mathbf{J}_{fi} = \omega\mathbf{v}(\mathbf{k}, \omega), \quad \rho_{fi} = k\mathbf{v}(\mathbf{k}, \omega) \quad (143,4)$$

или

$$\mathbf{J}_{fi} = [k\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega)], \quad \rho_{fi} = 0. \quad (143,5)$$

Здесь \mathbf{v} — некоторый полярный, а \mathbf{a} — аксиальный векторы. В первом случае говорят о токе электрического, а во втором — магнитного типа. Согласно (143,2) \mathbf{v} и \mathbf{a} при $\mathbf{k}, \omega \rightarrow 0$ остаются конечными или обращаются в нуль.

Пусть энергия фотона $\omega \ll M_1$. Тогда можно пренебречь эффектом отдачи и считать покоящейся (в системе покоя частицы M_1) также и конечную частицу M_2 ; при этом ω становится заданной величиной: $\omega = M_1 - M_2$. Состояния покоящихся частиц M_1 и M_2 характеризуются трехмерными спинорами ω_1 и ω_2 рангов $2s_1$ и $2s_2$, где s_1 и s_2 — спины частиц. Ток перехода должен быть билинейной комбинацией ω_1 и ω_2^* . Из произведений компонент этих спиноров можно составить неприводимые тензоры рангов $l = s_1 + s_2, \dots, |s_1 - s_2|$ (при заданном l это будет истинный или псевдотензор в зависимости от внутренних четностей частиц M_1 и M_2). Кроме этих тензоров в нашем распоряжении имеется только вектор \mathbf{k} . Имея в виду построить первый член разложения тока по степеням \mathbf{k} , надо с помощью этих величин составить вектор по возможности низкой степени по \mathbf{k} . Мы достигнем этой цели, взяв тензор наименьшего ранга и умножив его скалярно $l-1$ раз на вектор \mathbf{k} . Это и будет полярный вектор \mathbf{v} или аксиальный вектор \mathbf{a} .

Пусть Q_{lm} — сферические компоненты тензора, составленного из волновых амплитуд частиц. Сферические же компоненты тензора ранга $l-1$, составленного из компонент \mathbf{k} , равны $|\mathbf{k}|^{l-1} Y_{l-1, m}(\mathbf{n})$ (где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$). По общему правилу сложения сферических тензоров (см. III (107,3)) сферические компоненты вектора \mathbf{v} можно написать в виде

$$v_\lambda = (-1)^{\lambda+1} i^l \frac{\sqrt{4\pi}}{(2l-1)!!} \sqrt{\frac{2l+1}{l}} |\mathbf{k}|^{l-1} \times \\ \times \sum_m \binom{l-1}{\lambda+m} \binom{l-1}{-\lambda-m} Q_{l, -m} Y_{l-1, \lambda+m}(\mathbf{n}),$$

где λ пробегает значения $0, \pm 1$ (о выборе общего множителя см. ниже). Используя формулы (7,16), можно выразить \mathbf{v}

через шаровые векторы:

$$\mathbf{v} = i^l \frac{V^{4\pi} |\mathbf{k}|^{l-1}}{(2l-1)!! V^l (2l+1)} \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l,-m} \times \\ \times [V\sqrt{l+1} Y_{lm}^{(s)}(\mathbf{n}) + V\bar{l} Y_{lm}^{(m)}(\mathbf{n})]. \quad (143,6)$$

Подставив в (143,4), найдем El -ток перехода:

$$\mathbf{J}_{fi} = i^l \frac{V^{4\pi} \omega |\mathbf{k}|^{l-1}}{(2l-1)!! V^l (2l+1)} \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l,-m}^{(s)} \times \\ \times [V\sqrt{l+1} Y_{lm}^{(s)}(\mathbf{n}) + V\bar{l} Y_{lm}^{(m)}(\mathbf{n})], \quad (143,7)$$

$$\rho_{fi} = i^l \frac{V^{4\pi} |\mathbf{k}|^l}{(2l-1)!! V^{2l+1}} \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l,-m}^{(s)} Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (143,8)$$

(мы различаем везде $|\mathbf{k}|$ и ω , имея в виду возможные применения как к реальным, так и к виртуальным фотонам, для которых эти величины не совпадают).

В (143,7—8) подразумевается, что сферический тензор Q_{lm} (обозначенный здесь как $Q_{lm}^{(s)}$) — истинный тензор. Если же это псевдотензор (в каком случае обозначим его как $Q_{lm}^{(m)}$), то формула (143,6) определит псевдовектор \mathbf{a} . Подстановка в (143,5) дает тогда MI -ток перехода:

$$\mathbf{J}_{fi} = i^l \frac{V^{4\pi}}{(2l-1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{l(2l+1)}} |\mathbf{k}|^l \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l,-m}^{(m)} Y_{lm}^{(m)}(\mathbf{n}), \quad (143,9)$$

$$\rho_{fi} = 0.$$

Величины $Q_{lm}^{(s)}$ и $Q_{lm}^{(m)}$ представляют собой адронные электрические и магнитные мультипольные моменты перехода. Их роль в электродинамике адронов вполне аналогична роли соответствующих величин в электродинамике электронов. В то время, однако, как для электронных систем эти моменты могут быть, в принципе, вычислены по волновым функциям (как матричные элементы соответствующих операторов), в электродинамике адронов они выступают как феноменологические величины, значения которых находятся из опыта.

Нормировка этих величин в (143,7—9) выбрана так, чтобы соответствовать их определению в § 46. В этом можно убедиться, рассматривая токи (143,7—9) как компоненты Фурье тока перехода в координатном представлении. Так, разложив множитель $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ в интеграле

$$\rho_{fi}(\mathbf{k}) = \int \rho_{fi}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3x \quad (143,10)$$

с помощью формулы (46,3), получим

$$\rho_{fi}(\mathbf{k}) = 4\pi i^l \sum_{l,m} Y_{lm}(\mathbf{n}) \int \rho_{fi}(\mathbf{r}) Y_{lm}^*\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) g_l(|\mathbf{k}|r) d^3x.$$

Оставив здесь член с наименьшим l , для которого интеграл отличен от нуля, и заменив функцию $g_l(|\mathbf{k}|r)$ при $|\mathbf{k}|r \ll 1$ ее первым членом разложения (46,5), мы вернемся к формуле (143,9), причем

$$Q_{lm}^{(s)} = V \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r^l \rho_{fi}(\mathbf{r}) Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) d^3x \quad (143,11)$$

в соответствии с определением (46,7).

Покажем также, что при применении к испусканию реального фотона полученные формулы приводят к уже известным нам результатам.

Амплитуда перехода с испусканием фотона с импульсом $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$ и поляризацией $\mathbf{e} = (0, \mathbf{e})$:

$$M_{fi} = -e \sqrt{4\pi} \mathbf{e}^* \mathbf{J}_{fi}. \quad (143,12)$$

Если в начальном и конечном состояниях ядро обладает определенным значением проекции момента (M_i и M_f), то в сумме по m в (143,7—9) остается лишь по одному члену: $m = M_i - M_f$. Поскольку согласно (16,23) произведения $\mathbf{Y}_{lm}^{(s)} e^{(\lambda)*}$ или $\mathbf{Y}_{lm}^{(m)} e^{(\lambda)*}$ (где $\lambda = \pm 1$ — спиральность фотона, $\mathbf{e}^{(\lambda)} \perp \mathbf{n}$) пропорциональны $D_{\lambda m}^l$, то мы возвращаемся к формулам, рассмотренным в § 48. Дифференциальная вероятность излучения¹⁾

$$d\omega = 2\pi \delta[\omega - (E_i - E_f)] |M_{fi}|^2 \frac{d^3k}{2\omega (2\pi)^3} \quad (143,13)$$

(E_i, E_f — начальная и конечная энергии ядра). Полная вероятность получится суммированием по поляризациям и интегрированием по d^3k . Подставив (143,7) или (143,9) в (143,12) и затем в (143,13) и произведя указанные действия, мы вернемся к формуле (46,9) (или (47,2)).

Формулы (143,7—9) включают в себя все случаи, которые могут иметь место для испускания реального фотона. Для виртуальных же фотонов возможен еще и другой случай, не охватываемый этими формулами (*R. H. Fowler, 1930*).

Если спины и четности начального и конечного состояний ядра одинаковы, то из их волновых амплитуд можно составить скаляр Q_0 , а с его помощью — ток перехода вида

$$\rho_{fi} = Q_0 \mathbf{k}^2, \quad \mathbf{J}_{fi} = Q_0 \omega \mathbf{k}. \quad (143,14)$$

¹⁾ Множитель $2\pi\delta$ в этой формуле вместо $(2\pi)^4\delta^{(4)}$ в (65,11) связан с тем, что при пренебрежении отдачей ядра импульс не сохраняется, так что остается лишь сохранение энергии.

Величину Q_0 называют *монопольным* ($E0$) моментом перехода. Для испускания реального фотона соответствующая амплитуда перехода обращается в нуль (так как $e^*k = 0$). Монопольный ток, однако, может быть источником переходов, связанных с испусканием виртуального фотона. Более того, он является единственным таким источником при $s_1 = s_2 = 0$, когда все мультипольные моменты равны нулю.

По своей зависимости от ω и k монопольный ток (143,14) аналогичен электрическому квадрупольному. Соответственно и момент Q_0 представляет собой величину того же порядка, что и квадрупольный момент. К этому заключению можно прийти также и путем истолкования (143,14) как фурье-компоненты тока в координатном представлении. Разложив в (143,10)

$$e^{-ikr} = 1 - ikr - \frac{1}{2}(kr)^2 + \dots$$

и полагая, что интегралы от первых двух членов обращаются в нуль, получим

$$\rho_{fi}(k) = -\frac{1}{2} \int \rho_{fi}(r) (kr)^2 d^3x$$

или, полагая функцию $\rho(r)$ сферически-симметричной,

$$\rho_{fi}(k) = -\frac{1}{6} k^2 \int \rho_{fi}(r) r^2 d^3x.$$

Сравнив с (143,14), находим

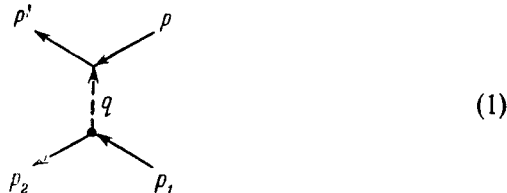
$$Q_0 = -\frac{1}{6} \int \rho_{fi}(r) r^2 d^3x. \quad (143,15)$$

Сходство этой величины с квадрупольным моментом очевидно.

• Задачи

1. Найти вероятность ионизации атома из K -оболочки за счет энергии возбуждения ядра ω (так называемая внутренняя конверсия γ -лучей) при ядерном $M1$ -переходе в пренебрежении энергией связи электрона в атоме и влиянием поля ядра на его волновые функции¹⁾.

Решение. Процесс описывается диаграммой



¹⁾ Это приближение требует малости заряда ядра и достаточно больших энергий возбуждения ω (в то же время $1/\omega$ предполагается большим по сравнению с размерами ядра). Фактически такое приближение малоудовлетворительно, и более точное вычисление требует учета кулонова поля ядра.

где p_1 и p_2 относятся к неподвижному ядру в различных состояниях, а $p = (m, 0)$ и $p' = (m + \omega, p')$ — 4-импульсы начального и конечного электронов. Этой диаграмме отвечает амплитуда

$$M_{fi} = e^2 \frac{4\pi}{q^2} \bar{u}(p') \hat{J}_{fi} u(p),$$

где J_{fi} — ток перехода ядра. После суммирования по конечным и усреднения по начальным поляризациям электрона

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{поля}} |M_{fi}|^2 = e^4 \frac{16\pi^2}{(q^2)^2} \{q^2 (J_{fi} J_{fi}^*) + 4 (J_{fi} p) (J_{fi}^* p)\}$$

(использовано, что $J_{fi} q = 0$ и потому $J_{fi} p = J_{fi} p'$). Вероятность конверсии вычисляется как

$$d\omega_{\text{конв}} = 2 |\psi_i(0)|^2 \left(\frac{p}{m} d\sigma \right)_{p \rightarrow 0},$$

где $d\sigma$ — сечение рассеяния, изображающегося диаграммой (1) с $p = (e, p)$, а ψ_i — волновая функция атомного электрона (для K -электрона $|\psi_i(0)|^2 = (Z\alpha m)^3/\pi$). Множитель 2 учитывает два электрона в K -оболочке атома. Сечение $d\sigma$ вычисляется как

$$d\sigma = 2\pi \delta(e + \omega - e') |M_{fi}|^2 \frac{d^3p'}{2|p| 2e' (2\pi)^3}$$

(ср. примечание на стр. 227).

Для $M1$ -переходов ток J_{fi} надо взять из (143,9). Интегрирование $d\omega_{\text{конв}}$ по de' устраняет δ -функцию, а интегрирование по do' обращает квадрат $|Y_{lm}^{(m)}|^2$ в 1. В результате вероятность конверсии окажется выраженной через квадрат $|Q_{l,-m}^{(m)}|^2$. Но через эту же величину выражается согласно (46,9) вероятность ω_{γ} спонтанного излучения фотона при том же ядерном переходе. Окончательно получается

$$\frac{\omega_{\text{конв}}}{\omega_{\gamma}} = 2\alpha (Z\alpha)^3 \frac{m}{\omega} \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{l+1/2}$$

(это отношение называют коэффициентом конверсии).

2. То же для ядерного $E1$ -перехода.

Решение. Тем же способом с током перехода из (143,7—8) получается

$$\frac{\omega_{\text{конв}}}{\omega_{\gamma}} = 2\alpha (Z\alpha)^3 \left(1 + \frac{l}{l+1} \frac{m^2}{\omega^2}\right) \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{l-1/2}.$$

3. То же для монопольного перехода ядра.

Решение. С током перехода из (143,14) получается

$$\omega_{\text{конв}} = 16\alpha^2 (Z\alpha)^3 m^3 \omega^2 \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{3/2} |Q_0|^2.$$

Поскольку монопольное испускание фотона невозможно, исключить отсюда $|Q_0|^2$ нельзя.

§ 144. Изотопические свойства электромагнитных формфакторов адронов

Введенный в § 139 электромагнитный вершинный оператор $\Gamma(q)$ (4-вектор) действует на функции 4-импульсов и спиновых переменных. Если же в рассмотрение привлекаются также и изотопические свойства частиц, то вершинный оператор будет

действовать и на их изоспиновые переменные. При этом два адронных конца «треххвостки» (139,2) уже не обязательно отвечают одной и той же частице: это могут быть любые два члена одного изомультиплета. Оператором же вершины без изменения рода адрона будет диагональный по изоспиновым переменным матричный элемент $\langle h | \Gamma | h \rangle$ (где h обозначает род адрона).

Электромагнитное взаимодействие нарушает изотопическую инвариантность, которой обладают сильные взаимодействия. Это значит, что электромагнитный вершинный оператор Γ не является изоскаляром. К установлению его изотопических свойств можно прийти следующим образом.

При $q = 0$ матричный элемент $\langle h | \Gamma(q) | h \rangle$ сводится, как мы видели в § 139, к электрическому заряду адрона Z . Но $Z = Y/2 + T_3$, т. е. складывается из изоскаляра и собственного значения третьей компоненты изовектора. Естественно предположить, что изотензорный характер оператора Γ не зависит от q . Тогда

$$\Gamma(q) = \Gamma_s(q) + \Gamma_3(q), \quad (144,1)$$

где Γ_s — изоскалярный оператор, а Γ_3 — третья компонента изовекторного оператора.

Из (144,1) следует, что при любых q будет

$$\langle h | \Gamma(q) | h \rangle = c_1(q) + c_2(q) T_3, \quad (144,2)$$

где $c_1(q)$ и $c_2(q)$ — одни и те же функции (4-векторы) для всех членов изомультиплета. Такой же структурой будут обладать и электромагнитные формфакторы, через которые (согласно § 139) выражается вершинный оператор без изменения рода адрона. Формула (144,2) дает реальные соотношения (т. е. позволяет исключить c_1 и c_2), когда изомультиплет содержит более двух компонент, т. е. $T > 1/2$. Например, для триплета Σ -гиперонов получим

$$\langle \Sigma^+ | \Gamma | \Sigma^+ \rangle + \langle \Sigma^- | \Gamma | \Sigma^- \rangle = 2 \langle \Sigma^0 | \Gamma | \Sigma^0 \rangle.$$

В частности, таким должно быть соотношение между магнитными моментами этих частиц:

$$\mu(\Sigma^+) + \mu(\Sigma^-) = 2\mu(\Sigma^0) \quad (144,3)$$

(*R. E. Marshak, S. Okubo, E. Sudarshan, 1958*).

Допустив у сильных взаимодействий более широкую унитарную симметрию $SU(3)$, мы должны приписать оператору Γ также и определенный суперспинорный характер.

Для этого заметим, что диагональная матрица λ_1^1 есть оператор заряда кварка (ср. (136,14) и определение (138,5)). Матрица же $-\bar{\lambda}_1^1$, действующая на нижний индекс, есть оператор

заряда антикварка. Поэтому оператор заряда в любом супермультиплете есть $Z = \Lambda_1^1 - \bar{\Lambda}_1^1$ (Λ определено в (138,4)). Подобно тому как это было сделано при выводе (144,1), естественно предположить, что в общем случае $q \neq 0$ суперспинорная структура оператора Γ будет

$$\Gamma = c_1 \Lambda_1^1 + c_2 \bar{\Lambda}_1^1 \quad (144,4)$$

(*N. Cabibbo, R. Gatto, S. Coleman, S. L. Gleshow, 1961*).

Задача

Найти соотношения между магнитными моментами компонент барионного супероктета.

Решение. Общий вид матричного элемента $\langle h | \Gamma | h \rangle$, а тем самым и магнитного момента $\mu(h)$:

$$\mu(h) = c_1 \bar{\psi}_b^c (\lambda_1^1)_a^b \psi_c^a + c_2 \bar{\psi}_c^b (\lambda_1^1)_b^a \psi_a^c$$

(ср. (138,6)). Вычисляя эту величину для различных компонент барионного октета, получим (помимо равенства (144,3), возникающего уже в результате изотопической инвариантности) следующие соотношения:

$$\mu(n) = \mu(\Xi^0) = 2\mu(\Lambda) = -2\mu(\Sigma^0),$$

$$\mu(p) = \mu(\Sigma^+), \quad \mu(\Sigma^-) = \mu(\Xi^-).$$

ГЛАВА XVI

СЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

§ 145. Слабое взаимодействие лептонов

Особую группу частиц, не способных к сильным взаимодействиям, составляют *лептоны*¹⁾. К ним относятся электроны e^- , мюоны μ^- , два вида нейтрино: так называемые электронное ν_e и мюонное ν_μ — и их античастицы: e^+ , μ^+ , $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$. Все лептоны имеют спин $1/2$. Напомним (см. § 30), что нейтрино отличается от антинейтрино знаком спиральности, причем нейтрино называют частицу со спиральностью $\lambda = -1/2$, а антинейтрино — $\lambda = +1/2$.

Масса мюона

$$m_\mu = 105,66 \text{ Мэв.}$$

Мюоны — неустойчивые частицы. Они распадаются согласно

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (145,1)$$

со временем жизни $2,20 \cdot 10^{-6}$ сек.

Лептоны способны лишь к слабым взаимодействиям (помимо электромагнитных). При этом соблюдаются два специфических закона сохранения; существующие данные укладываются в формулировку этих законов путем приписывания лептонам определенных значений электронного (L_e) и мюонного (L_μ) лептонных чисел:

$$L_e = \begin{matrix} e^- & \nu_e & e^+ & \bar{\nu}_e \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{matrix} \quad L_\mu = \begin{matrix} \mu^- & \nu_\mu & \mu^+ & \bar{\nu}_\mu \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{matrix}. \quad (145,2)$$

Законы сохранения этих чисел означают, другими словами, что в реакциях сохраняются по отдельности суммы

$$N_{e^-} + N_{\nu_e} - N_{e^+} - N_{\bar{\nu}_e} \quad \text{и} \quad N_{\mu^-} + N_{\nu_\mu} - N_{\mu^+} - N_{\bar{\nu}_\mu},$$

где N — числа соответствующих частиц.

¹⁾ От греческого слова «лептос», которое означает «мелкий», «легкий».

В то же время слабые взаимодействия нарушают некоторые из законов сохранения, соблюдающихся в электромагнитных и сильных взаимодействиях: не сохраняются пространственная и зарядовая четности¹⁾. В реакциях с участием адронов нарушаются также сохранение изотопического спина и гиперзаряда.

Последовательная физическая теория слабых взаимодействий в настоящее время отсутствует. Неизвестно даже, может ли вообще быть сформулирована такая теория сама по себе, в отрыве от теории сильных взаимодействий. Имеющаяся же теория носит, по существу, лишь феноменологический характер. Она основана на использовании различных соображений симметрии и релятивистской инвариантности, а также на некоторых специальных гипотезах. При всей их кажущейся правдоподобности, эти гипотезы не составляют логически стройной системы, и вера в них может основываться лишь на результатах прямой проверки опытом, которая в настоящее время еще во многом недостаточна.

Рассмотрим сначала «слабые реакции» (реакции, обусловленные слабыми взаимодействиями), в которых участвуют только лептоны. Важнейший пример таких реакций — распад мюона (145,1).

Наиболее общий вид амплитуды этого процесса, устанавливаемый лишь требованиями релятивистской инвариантности:

$$M_{fi} = \sum_{n=1}^4 f_n I_n, \quad (145,3)$$

где f_n — инвариантные амплитуды (функции 4-импульсов частиц — см. § 71), а I_n — инвариантные «четырёхлинейные» комбинации, составленные из волновых амплитуд четырех участвующих в реакции частиц. Число членов в этой сумме, т. е. число независимых инвариантных амплитуд, равно четырем; это очевидно из подсчета числа возможных наборов значений спиральностей частиц (с учетом того, что спиральности нейтрино — заданные величины).

Подчеркнем, что, говоря об инвариантности членов суммы (145,3), мы имеем в виду инвариантность только по отношению к преобразованиям Лоренца, но не по отношению к пространственной инверсии. В таком же смысле мы говорим ниже о 4-векторах. Вопрос о поведении по отношению к инверсии вообще теряет здесь смысл, так как, изменив знак спиральности,

¹⁾ Идея о возможном несохранении пространственной четности в слабых взаимодействиях была впервые высказана Ли и Янгом (1956).

инверсия превратила бы нейтрино в несуществующую в природе частицу.

Будем для определенности говорить о распаде μ^- . Напомним, что при составлении амплитуды реакции античастица в конечном состоянии (с 4-импульсом p) фигурирует как частица в начальном состоянии (с 4-импульсом $-p$).

В спинорном представлении волновые амплитуды частиц:

$$u_e = \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix}, \quad u_\mu = \begin{pmatrix} \xi_\mu \\ \eta_\mu \end{pmatrix}, \quad u_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_\nu \end{pmatrix}, \quad (145,4)$$

где ξ и η — соответственно непунктирные и пунктирные спиноры. Из компонент u_{ν_e} и $u_{\nu_\mu}^*$ можно составить четыре билинейные величины:

$$\zeta_{rs}^{(\nu_e \nu_\mu)} = \eta_{\nu_e r}^* \eta_{\nu_\mu s}$$

($r, s = 1, 2$), эквивалентные компонентам 4-вектора (см. § 18; напомним, что η^* — непунктирный спинор). Из компонент же u_μ и u_e^* можно аналогичным образом составить два 4-вектора:

$$\zeta_{rs}^{(e\mu)} = \eta_{\mu r} \eta_{e s}^*, \quad \chi_{rs}^{(e\mu)} = \xi_{\mu r}^* \xi_{e s}$$

С помощью этих величин строятся два инварианта:

$$I_1 = \zeta_{rs}^{(\nu_e \nu_\mu)} \zeta^{(e\mu) rs}, \quad I_2 = \zeta_{rs}^{(\nu_e \nu_\mu)} \chi^{(e\mu) rs}.$$

Для построения еще двух инвариантов надо привлечь, наряду с волновыми амплитудами (145,4), еще и другие величины — какой-либо из характерных для реакции 4-импульсов.

Для истолкования имеющихся экспериментальных данных о распаде мюона оказывается достаточным предположить, что из четырех инвариантных амплитуд в (145,3) фактически отлична от нуля только одна — отвечающая инварианту I_1 , содержащему лишь одинаковые (η) компоненты волновых функций взаимодействующих частиц. В симметричном виде, не зависящем от выбора представления волновых функций, этот инвариант записывается как¹⁾

$$I_1 = \frac{1}{2} (\bar{u}_e O_\alpha u_\mu) (\bar{u}_{\nu_\mu} O^\alpha u_{\nu_e}),$$

где

$$O^\alpha = \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) = (1 - \gamma^5) \gamma^\alpha = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \gamma^\alpha (1 + \gamma^5). \quad (145,5)$$

¹⁾ В этой главе мы будем обозначать четырехмерные тензорные индексы первыми буквами греческого алфавита α, β, \dots во избежание путаницы с индексами μ, ν , которыми нам придется пользоваться для обозначения частиц.

Множители $(1 \pm \gamma^5)$ в матрицах O^α устраняют из произведений $(\bar{u} O u)$ ξ -компоненты биспиноров (ср. § 30). Обозначив соответствующую инвариантную амплитуду через $-G/\sqrt{2}$, напомним амплитуду реакции распада мюона как

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_e O_\alpha u_\mu) (\bar{u}_{\nu_\mu} O^\alpha u_{\nu_e}) \quad (145,6)$$

или, в эквивалентном виде,

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_e O_\alpha u_{\nu_e}) (\bar{u}_{\nu_\mu} O^\alpha u_\mu) \quad (145,7)$$

(см. задачу 2 § 28).

Величина G могла бы быть некоторой (инвариантной) функцией 4-импульсов частиц. Но имеющиеся экспериментальные данные о распаде мюона позволяют пренебречь этой возможной зависимостью и считать G постоянной величиной — константой слабого взаимодействия.

Постоянство G дает возможность представить амплитуду (145,7) как элемент S -матрицы, вычисленной в первом порядке по гамильтониану

$$-\frac{G}{\sqrt{2}} \int (\bar{\Psi}_e O_\alpha \Psi_{\nu_e}) (\bar{\Psi}_{\nu_\mu} O^\alpha \Psi_\mu) d^3x, \quad (145,8)$$

который можно рассматривать как ответственную за данный процесс часть гамильтониана взаимодействия. В полный гамильтониан эта часть должна входить вместе с эрмитово-сопряженным выражением. При эрмитовом сопряжении

$$(\bar{\Psi}_{\nu_e} O^\alpha \Psi_e)^\dagger = (\bar{\Psi}_e \bar{O}^\alpha \Psi_{\nu_e}), \quad \bar{O}^\alpha = \gamma^0 O^{\alpha\dagger} \gamma^0. \quad (145,9)$$

Заметив, что $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$ и $\gamma^{\alpha\dagger} = \gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^0$, находим $\bar{O}^\alpha = O^\alpha$. Поэтому выражение, эрмитово-сопряженное с (145,8), имеет вид

$$-\frac{G^*}{\sqrt{2}} \int (\bar{\Psi}_{\nu_e} O_\alpha \Psi_e) (\bar{\Psi}_\mu O^\alpha \Psi_{\nu_\mu}) d^3x. \quad (145,10)$$

Если оператор (145,8) ответствен за распад μ^- , то оператор (145,10) — за распад μ^+ .

Без ограничения общности постоянную G можно считать вещественной. Действительно, Ψ -оператор всякого комплексного поля определен лишь с точностью до произвольного фазового множителя (ср. (12,10)). Поэтому соответствующим преобразованием какого-либо из Ψ -операторов можно устранить любой фазовый множитель в G .

Естественный следующий шаг обобщения состоит в постулировании следующего вида гамильтониана слабого взаимо-

действия лептонов:

$$H_w = - \frac{G}{\sqrt{2}} \int (j_w^+ j_w) d^3x, \quad (145,11)$$

где 4-вектор j_w — оператор слабого тока — определяется согласно ¹⁾

$$\begin{aligned} j_w^\alpha &= \bar{\Psi}_e O^\alpha \Psi_{\nu_e} + \bar{\Psi}_\mu O^\alpha \Psi_{\nu_\mu}, \\ j_w^{\alpha+} &= \bar{\Psi}_{\nu_e} O^\alpha \Psi_e + \bar{\Psi}_{\nu_\mu} O^\alpha \Psi_\mu. \end{aligned} \quad (145,12)$$

Оператор j_w уменьшает электрический заряд системы на 1 (рождение e^- или μ^- или уничтожение e^+ или μ^+), а оператор j_w^+ увеличивает заряд на 1; произведение же $j_w^+ j_w$ оставляет заряд неизменным. Способ построения операторов (145,12) учитывает, конечно, также и сохранение обоих лептонных чисел. Помимо членов (145,8), (145,10), в выражении (145,11) возникают также и члены, приводящие к новым процессам — упругому рассеянию нейтрино на электронах.

Обратим внимание на симметрию тока (145,12) по отношению к парам частиц $e\nu_e$ и $\mu\nu_\mu$. Это значит, что различие в свойствах слабых процессов с участием электрона или мюона может быть связано только с различием их масс. Напомним, что такая же ситуация имеет место и в отношении электромагнитных взаимодействий электрона и мюона.

Размерность плотности тока (в обычных единицах): $[j] = \text{см}^{-3}$. Поэтому размерность константы взаимодействия $[G] = \text{эрг} \cdot \text{см}^3$. В релятивистских единицах это значит, что G имеет размерность обратного квадрата массы. Ее численное значение в этих единицах:

$$G = 1,0 \cdot 10^{-5} m_p^{-2}, \quad (145,13)$$

где m_p — масса нуклона. В обычных же единицах:

$$G = 1,0 \cdot 10^{-5} \frac{\hbar^3}{m_p^2 c} = 1,43 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3. \quad (145,14)$$

Безразмерное число 10^{-5} характеризует степень малости взаимодействия.

Характерное свойство гамильтониана (145,11) (связанное с предположенным постоянством G) состоит в его «локально-

¹⁾ Описание слабого взаимодействия в виде произведения двух билинейных по ψ -операторам токов было впервые предложено Ферми в 1934 г. в его теории β -распада. Вариант теории, основанный на токе вида (131,12), предложен Гелл-Манном и Фейнманом (1958) и Маршаком и Сударшаном (1958).

сти»: все четыре ψ -оператора берутся при одних и тех же значениях 4-координат x . Можно сказать, что все частицы рождаются или уничтожаются в одной точке. Другими словами, сделанное предположение означает, что «радиус действия» слабых сил полагается равным нулю.

Следует подчеркнуть, что смысл введения гамильтониана (145,11) не выходит за рамки выражаемого им способа построения амплитуд реакций в первом приближении теории возмущений. Применение этого оператора в более высоких приближениях привело бы к появлению неустраиваемых расходимостей. В этом смысле (145,11) — лишь феноменологический, эффективный гамильтониан.

Несохранению четности в слабых взаимодействиях соответствует ненвариантность гамильтониана (145,11) по отношению к пространственной инверсии. Эту ненвариантность мы отмечали уже выше, при составлении амплитуды реакции. Она очевидна и из записи токов с помощью матриц O^α : выражение вида $\bar{\Psi}_a \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) \Psi_b$ представляет собой сумму двух 4-векторов, причем один — истинный вектор (V), а другой — псевдовектор (A), и потому оба преобразуются при инверсии различным образом ¹⁾.

Гамильтониан (145,11) не инвариантен также и по отношению к зарядовому сопряжению. Он инвариантен, однако, по отношению к одновременному применению обоих преобразований (комбинированная инверсия). Напомним, что в силу универсальной CPT -инвариантности CP -инверсия эквивалентна обращению времени.

Правила преобразования операторных 4-векторов

$$V^\alpha = \bar{\Psi}_a \gamma^\alpha \Psi_b, \quad A^\alpha = \bar{\Psi}_a \gamma^\alpha \gamma^5 \Psi_b$$

при зарядовом сопряжении и при инверсии были установлены в § 28. Комбинируя (28,4) и (28,7), найдем, что оператор CP преобразует эти 4-векторы одинаковым образом:

$$CP: (V_{ab}^0, \mathbf{V}_{ab}) \rightarrow (-V_{ba}^0, \mathbf{V}_{ba}), \quad (A_{ab}^0, \mathbf{A}_{ab}) \rightarrow (-A_{ba}^0, \mathbf{A}_{ba}).$$

Для оператора тока это означает замену

$$CP: (j_w^0, \mathbf{j}_w) \rightarrow (-j_w^{0+}, \mathbf{j}_w^+). \quad (145,15)$$

Произведение же токов $j_w^+ j_w \rightarrow j_w j_w^+ = j_w^+ j_w$ (перестановка j_w и

¹⁾ По этой причине взаимодействие токов (145,12) часто называют $(V-A)$ -взаимодействием.

j_w^+ связана с четным числом транспозиций различных ψ -операторов и потому не требует изменения знака).

Таким образом, слабое взаимодействие, описываемое гамльтонианом (145,11), сохраняет комбинированную четность¹⁾.

§ 146. Распад мюона

Согласно (65,11) дифференциальная вероятность трехчастичного распада в единицу времени (в системе покоя мюона) выражается через амплитуду $|M_{fi}|^2$ формулой

$$d\omega = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_e + k_e + k_\mu - p_\mu) \frac{|M_{fi}|^2}{2m_\mu} \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3 2\varepsilon_e} \frac{d^3k_e}{(2\pi)^3 2\omega_e} \frac{d^3k_\mu}{(2\pi)^3 2\omega_\mu}. \quad (146,1)$$

Здесь $p_\mu = (m_\mu, 0)$ и $p_e = (\varepsilon_e, \mathbf{p}_e)$ — 4-импульсы мюона и электрона, а $k_\mu = (\omega_\mu, \mathbf{k}_\mu)$ и $k_e = (\omega_e, \mathbf{k}_e)$ — 4-импульсы двух нейтрино (или антинейтрино).

Квадрат $|M_{fi}|^2$ вычисляется по изложенным в § 66 правилам. Имеем

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2} (\bar{u}_e O_\alpha u_{\nu_e}) (\bar{u}_{\nu_e} O_\beta u_e) (\bar{u}_{\nu_\mu} O^\alpha u_\mu) (\bar{u}_\mu O^\beta u_{\nu_\mu})$$

(M_{fi} взято в форме (145,7)). Введя поляризационные матрицы плотности всех частиц, переписываем это выражение в виде

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2} \text{Sp}(\rho_e O_\alpha \rho_{\nu_e} O_\beta) \text{Sp}(\rho_\mu O^\beta \rho_{\nu_\mu} O^\alpha) \equiv \frac{G^2}{2} A_{\alpha\beta}^{(e)} A^{(\mu)\beta\alpha}. \quad (146,2)$$

Согласно (29,13) и (29,16) матрицы плотности электрона и мюона

$$\rho = \frac{1}{2} (\hat{p} \pm m) (1 - \gamma^5 a), \quad ap = 0$$

(с индексами e или μ); здесь и ниже верхние или нижние знаки — соответственно для распада μ^- или μ^+ . Для матриц же ρ_ν надо положить

$$\rho_\nu = \bar{k},$$

что соответствует просуммированной по поляризациям матрице плотности «четырёхкомпонентной» частицы с нулевой массой

¹⁾ Принцип сохранения CP -четности был введен Л. Д. Ландау (1957) для «спасения» зеркальной симметрии пространства после открытия несохранения четности. Универсальное соблюдение этого принципа (т. е. полная симметрия природы по отношению к инверсии с одновременной заменой частиц на античастицы) переносила бы асимметрию с пространства на частицы. Инвариантность же по отношению к S и P по отдельности не затрагивала бы симметрии пространства в том же смысле, как ее не нарушает существование стереоизомерных молекул. В настоящее время, однако, известны также и такие процессы слабого взаимодействия, в которых комбинированная четность не сохраняется (§ 154).

(«двухкомпонентность» нейтрино уже учтена введением в матрицы O^α множителя $1 + \gamma^5$).

Сведя вместе множители $1 + \gamma^5$ и γ^5 и отбросив все члены, обращаясь в нуль тождественно (по числу входящих в них матриц γ), получим

$$A^{\alpha\beta} = \text{Sp} \hat{P} \gamma^\alpha \bar{k} \gamma^\beta (1 + \gamma^5), \quad P = p - ma,$$

после чего вычисление с помощью (22,13) и (22,20) дает

$$A^{\alpha\beta} = 4 [P^\alpha k^\beta + P^\beta k^\alpha - (Pk) g^{\alpha\beta} - i e^{\alpha\beta\gamma\delta} P_\gamma k_\delta]. \quad (146,3)$$

Подставив в (146,2) и произведя перемножение, найдем¹⁾

$$|M_{fi}|^2 = 32G^2 [(p_e k_\mu) - m_e (a_e k_\mu)] [(p_\mu k_e) - m_\mu (a_\mu k_e)]. \quad (146,4)$$

Интегрирование вероятности (146,1) по импульсам нейтрино сводится к вычислению интеграла

$$I^{\alpha\beta} = \int \frac{k_e^\alpha k_\mu^\beta}{\omega_e \omega_\mu} \delta^{(4)}(k_e + k_\mu - q) d^3k_e d^3k_\mu, \quad (146,5)$$

$$q = p_\mu - p_e \equiv (\omega, \mathbf{q}).$$

Очевидно, что этот интеграл должен иметь вид

$$I^{\alpha\beta} = Aq^2 g^{\alpha\beta} + Bk^\alpha k^\beta.$$

Для определения A и B пишем:

$$I_\alpha^\alpha = (4A + B)q^2 = \frac{1}{2} Iq^2, \quad I^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = (A + B)(q^2)^2 = \frac{1}{4} I(q^2)^2,$$

где мы использовали равенства $\mathbf{q} = \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_\mu$, $k_e^2 = k_\mu^2 = 0$ и обозначили через I скалярный интеграл

$$I = \int \frac{d^3k_e d^3k_\mu}{\omega_e \omega_\mu} \delta^{(4)}(k_e + k_\mu - q).$$

Интегрирование по d^3k_μ устраняется множителем $\delta(\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_\mu - \mathbf{q})$, после чего

$$I = \int \frac{d^3k_e}{\omega_e \omega_\mu} \delta(\omega_e + \omega_\mu - \omega).$$

Вычисляя этот скаляр в системе центра инерции двух нейтрино ($\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_\mu = 0$, $\omega_e = \omega_\mu$), получим

$$I = \int \frac{4\pi\omega_e^2 d\omega_e}{\omega_e^2} \delta(2\omega_e - \omega) = 2\pi.$$

¹⁾ Напомним, что $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma^{\delta\rho\sigma} = -2(\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\sigma - \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\gamma)$.

Окончательно для I^{ab} :

$$I^{ab} = \frac{\pi}{6} (q^2 g^{ab} + 2q^a q^b). \quad (146,6)$$

Собрав полученные выражения, найдем для дифференциальной (по импульсу электрона) вероятности распада в единицу времени

$$d\omega = \frac{G^2}{6(2\pi)^4 m_\mu} (p_e \mp m_e a_e)_\alpha (p_\mu \mp m_\mu a_\mu)_\beta (q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta) \frac{d^3 p_e}{\epsilon_e}. \quad (146,7)$$

Энергия, выделяемая в распаде мюона, велика по сравнению с массой электрона. Поэтому почти на всем протяжении их спектра электроны распада можно считать ультрарелятивистскими и при раскрытии четырехмерных выражений в (146,7) можно пренебречь величинами $\sim m_e/\epsilon_e$ (как и $\sim m_e/m_\mu$). В системе покоя мюона будем иметь

$$q^2 = m_\mu^2 - 2m_\mu \epsilon_e, \quad (p_e q) = (p_e p_\mu) = \epsilon_e m_\mu, \quad (q p_\mu) = m_\mu^2 - \epsilon_e m_\mu$$

(опущенные здесь члены $\sim m_e^2/\epsilon_e^2$). В той же системе 4-векторы a_μ и a_e имеют составляющие

$$a_\mu = (0, \xi_\mu), \quad a_e = (1, \mathbf{n}_e) \frac{\epsilon_e}{m_e} \mathbf{n}_e \xi_e^{(d)},$$

где $\mathbf{n}_e = \mathbf{p}_e/\epsilon_e$ — направление электрона, а $\xi_e^{(d)}$ и ξ_μ — векторы поляризации электрона и мюона (индекс (d) у ξ_e напоминает о том, что это — заданная поляризация конечной частицы, выделяемая детектором). После простых преобразований получим окончательно следующее выражение для распределения электронов по энергиям и направлениям при распаде поляризованного мюона:

$$d\omega = \frac{G^2 m_\mu^5}{3 \cdot 2^8 \pi^4} (1 \mp \xi_e^{(d)} \mathbf{n}_e) \left[\left(3 - 2 \frac{\epsilon_e}{\epsilon_{\max}} \right) \pm \xi_\mu \mathbf{n}_e \left(1 - 2 \frac{\epsilon_e}{\epsilon_{\max}} \right) \right] \frac{\epsilon_e^2 d\epsilon_e d\Omega_n}{\epsilon_{\max}^3}. \quad (146,8)$$

Здесь $\epsilon_{\max} \approx m_\mu/2$ — максимальное значение, которое может принимать энергия электрона (оно достигается, когда оба нейтрино летят в одну сторону, а электрон — в другую). Обратим внимание на то, что члены в (146,8), пропорциональные $\xi_\mu \mathbf{n}_e$ или $\xi_\mu \mathbf{n}_e$, — результат несохранения пространственной четности; эти члены меняют знак при пространственной инверсии и потому запрещались бы условием инвариантности по отношению к этому преобразованию.

После суммирования (146,8) по поляризациям электрона и интегрирования по его направлениям получим¹⁾

$$d\omega_e = \omega \cdot 2 \left(3 - 2 \frac{\epsilon_e}{\epsilon_{\max}} \right) \frac{\epsilon_e^2 d\epsilon_e}{\epsilon_{\max}^3}, \quad (146,9)$$

где ω — полная вероятность распада:

$$\omega = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \quad (146,10)$$

Тот факт, что зависимость вероятности распада от $\xi_e^{(d)}$ дается множителем $(1 \mp \xi_e^{(d)} \mathbf{n}_e)$, означает, что вектор поляризации частицы как таковой (безотносительно к детектору) равен $\xi_e = \mp \mathbf{n}_e$, т. е. электрон (или позитрон) полностью поляризован против (или по) направлению своего движения. Этот результат можно было предвидеть заранее: в матричном элементе (145,8) фигурируют лишь η -компоненты амплитуды u_e (в ее спинорном представлении). Для ультрарелятивистского электрона эти компоненты отвечают спиральности $\lambda = -1/2$ (а для позитрона — спиральности $\lambda = +1/2$).

Однозначное соответствие спинорных компонент волновой функции электрона определенным значениям λ имеет, однако, место лишь в пределе полного пренебрежения его массой (когда уравнения для спиноров η и ξ разделяются). В следующих приближениях, при учете конечности массы электрона, наряду с изменением степени его продольной (вдоль \mathbf{n}_e) поляризации, появляется также и поперечная составляющая вектора ξ_e . Эта составляющая существует, конечно, лишь при распаде поляризованного мюона и лежит в плоскости, образуемой векторами \mathbf{n}_e и ξ_μ . Поляризация электрона в направлении, перпендикулярном этой плоскости, запрещена требованием T -инвариантности. Действительно, ей соответствовал бы член вида $\xi_e^{(d)} [\mathbf{n}_e \xi_n]$ в выражении для вероятности распада. Но такой член неинвариантен (меняет знак) при преобразовании

$$\mathbf{n}_e \rightarrow -\mathbf{n}_e, \quad \xi_e^{(d)} \rightarrow -\xi_e^{(d)}, \quad \xi_\mu \rightarrow -\xi_\mu, \quad (146,11)$$

выражающем собой обращение времени вместе с требованием эрмитовости S -матрицы в первом приближении теории возмущений (ср. (87,26)).

¹⁾ Это распределение неприменимо при $\epsilon_e \sim m_e$. Однако учет членов более высокого порядка по m_e/ϵ_e в изложенных вычислениях сам по себе не имеет смысла, так как в начальной области спектра электронов становятся существенными радиационные поправки (§ 147).

Отметим, что при $\epsilon_e \gg m_e$ погрешность в усредненном по поляризациям распределении (146,9) $\sim m_e^2/\epsilon_e^2$.

Задачи

1. Вычислить сечение упругого рассеяния нейтрино на электро-
Решение. Амплитуда рассеяния:

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{u}(p') O^{\alpha} u(p)] [\bar{u}(k') O_{\alpha} u(k)],$$

где $p = (\varepsilon, p)$, $k = (\omega, \mathbf{k})$ и p' , k' — начальные и конечные 4-импульсы электрона и нейтрино. Квадрат $|M_{fi}|^2$, просуммированный по поляризациям конечного и усредненный по поляризациям начального электронов:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{поляризация}} |M_{fi}|^2 = 2 \cdot 32G^2 (pk) (p'k') = 64G^2 (pk)^2$$

(ср. (146,3)). Согласно (65,19) найдем полное сечение:

$$\sigma = \frac{G^2}{\pi^2} \frac{(pk)^2}{(p+k)^2} 4\pi.$$

В системе центра инерции:

$$pk = \varepsilon\omega + \omega^2, \quad (p+k)^2 = (\varepsilon + \omega)^2, \quad \varepsilon = \sqrt{m_e^2 + \omega^2},$$

так что ¹⁾

$$\sigma = \frac{4G}{\pi} \omega^2.$$

Выразив же σ через энергию Ω нейтрино в лабораторной системе ($kp = m_e\Omega$, $(k+p)^2 = m_e^2 + 2m_e\Omega$), получим

$$\sigma = \frac{4G^2 m_e^2}{\pi} \frac{(\Omega/m_e)^2}{1 + 2\Omega/m_e}.$$

2. То же для рассеяния антинейтрино на электро-
Решение. Амплитуда рассеяния:

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{u}(p') O^{\alpha} u(p)] [\bar{u}(-k) O_{\alpha} u(-k')],$$

и затем

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{поляризация}} |M_{fi}|^2 = 64G^2 (pk') (p'k) = 64G^2 (pk')^2.$$

Сечение в системе центра инерции:

$$d\sigma = \frac{G^2}{\pi^2} \frac{\omega^2 (\varepsilon + \omega \cos \theta)^2}{(\varepsilon + \omega)^2} d\theta'$$

(θ — угол рассеяния). Полное сечение:

$$\sigma = \frac{4G^2}{3\pi} \frac{\omega^2 (3\varepsilon^2 + \omega^2)}{(\varepsilon + \omega)^2}.$$

¹⁾ Ввиду локальности слабого взаимодействия, в рассеянии принимает участие только s -волна. Согласно условию унитарности его сечение не может превышать $\sim \omega^{-2}$ (ср. III (122,12)). Между тем полученное выражение неограниченно растет с увеличением ω и достигает указанного верхнего предела уже при $\omega \sim G^{-1/2}$. Отсюда можно заключить, что излагаемая теория во всяком случае становится непригодной при таких энергиях.

В лабораторной системе:

$$\sigma = \frac{2G^2 m_e \Omega}{3\pi} \left[1 - \left(1 + 2 \frac{\Omega}{m_e} \right)^{-3} \right].$$

3. То же для реакции $\nu_{\mu} + e^{-} \rightarrow \nu_e + \mu^{-}$.

Решение. В отличие от задачи 1, 4-импульсы p и p' относятся теперь к частицам различной массы (e и μ). Поэтому в системе центра инерции величины импульсов $|p| = |k| = \omega$ и $|p'| = |k'| = \omega'$ различны. С помощью (65,19) для полного сечения получим

$$\sigma = \frac{4G^2}{\pi} \omega'^2,$$

где ω' — энергия конечного нейтрино.

§ 147. Радиационные поправки к распаду мюона

Уже упоминалось, что гамильтониан слабого взаимодействия (145,11) имеет смысл только в первом приближении теории возмущений; рассмотрение поправок более высокого порядка по G в существующей теории не имеет смысла. Однако заряженные лептоны — электроны и мюоны — способны, кроме слабого, также и к электромагнитному взаимодействию, которое можно рассматривать одновременно со слабым. Учет этого взаимодействия приводит, во-первых, к реальным процессам — испусканию фотонов и рождению электрон-позитронных пар при распаде мюона. Во-вторых, возникают радиационные поправки к вероятности распада за счет испускания и поглощения мюоном и электроном виртуальных фотонов.

Одновременному учету обоих взаимодействий соответствует гамильтониан

$$H_{\text{int}} = H_w + V, \quad (147,1)$$

где H_w дается выражением (145,11), а V — оператор электромагнитного взаимодействия мюона и электрона:

$$V = e \int (\bar{\psi}_e \hat{A} \psi_e + \bar{\psi}_{\mu} \hat{A} \psi_{\mu}) d^3x, \quad (147,2)$$

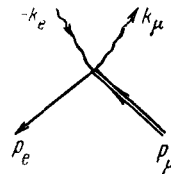
причем допустимо рассматривать члены лишь первого порядка по H_w , но, вообще говоря, любого порядка по V . Оператор рассеяния S имеет соответственно вид (ср. (73,9))

$$S = T \exp \left\{ -i \int [H_w(t) + V(t)] dt \right\} \approx S_{el} - iT \left\{ \int H_w(t) dt e^{-i \int V(t) dt} \right\}, \quad (147,3)$$

где S_{el} относится к чисто электромагнитным переходам. Поступая с этим выражением описанным в § 78 образом, легко построить диаграммную технику для вычисления амплитуды

процесса в любом приближении по электромагнитному взаимодействию.

В нулевом приближении по V получим, как и следовало ожидать, результат (145,6) для амплитуды распада мюона, изображаемой диаграммой *четырёхфермионной вершины*:



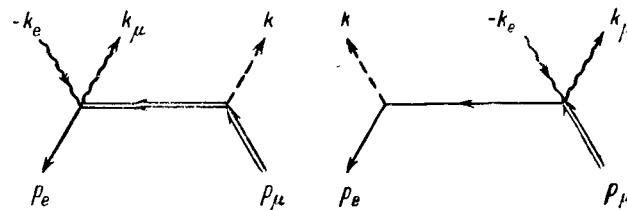
$$= iM_{fi} = -\frac{iG}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{\nu\mu} O^\alpha u_{\nu e}) (\bar{u}_e O_\alpha u_\mu) \quad (147,4)$$

(линия мюона изображена, в отличие от электронной линии, двойной; волнистые линии отвечают нейтрину¹⁾).

Более сложные диаграммы следующих приближений по электромагнитному взаимодействию получаются из (147,4) добавлением по обычным правилам линий виртуальных и реальных фотонов и замкнутых электронных и мюонных петель. Разумеется, фотонные линии могут ответвляться только от линий заряженных частиц — электронов и мюонов. Нейтринные линии всегда остаются парой внешних концов, которым отвечает в амплитуде

процесса множитель $-\frac{iG}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{\nu\mu} O^\alpha u_{\nu e})$. По отношению же к мюонной и электронной линиям роль вершинного оператора в четырёхфермионной вершине играет матрица O^α (с тем же 4-векторным индексом α).

В первом порядке по электромагнитному взаимодействию имеем две диаграммы:



$$(147,5)$$

описывающие процесс излучения фотона k при распаде мюона (*внутреннее тормозное излучение*). Выпишем для примера

¹⁾ Для определенности мы рассматриваем здесь процессы с распадом мюона, которые описываются членом вида (145,8) в гамильтониане $H_{\text{в}}$. Вполне аналогичные диаграммы получаются для процессов рассеяния нейтрино на электроны и т. п.

использования диаграмм амплитуду этого процесса:

$$M_{fi} = -\sqrt{4\pi} e \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{\nu\mu} O_\alpha u_{\nu e}) (\bar{u}_e Q^{\alpha\beta} u_\mu) e_\beta^*$$

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{O^\alpha (\hat{p}_\mu - \hat{k} + m_\mu) \gamma^\beta}{(p_\mu - k)^2 - m_\mu^2} + \frac{\gamma^\beta (\hat{p}_\mu - \hat{k}_e - \hat{k}_\mu + m_e) O^\alpha}{(p_\mu - k_e - k_\mu)^2 - m_e^2}.$$

Вероятность же процесса выражается через амплитуду согласно (65,11). Приведем здесь для справок окончательную формулу для вероятности распада мюона (μ^+ или μ^-) с одновременным испусканием фотона $k = (\omega, \mathbf{k})$, просуммированную по поляризациям всех частиц и проинтегрированную по импульсам обоих нейтрино:

$$d\omega_{p_e k} = -\frac{\alpha G^2}{6(2\pi)^6} \frac{d^3 p_e}{\epsilon_e m_\mu} \frac{d^3 k}{\omega} \left\{ \left[\frac{m_\mu^4}{2} - q^2 \left(q^2 - \frac{m_\mu^2}{2} \right) \right] \left(\frac{p_\mu}{(p_\mu k)} - \frac{p_e}{(p_e k)} \right)^2 - 4q^2 - \frac{(kq)^2}{(p_e k) m_\mu \omega} (2q^2 + m_\mu^2) \right\}, \quad (147,6)$$

где $q = p_\mu - p_e - k$ (A. Lenard, 1953). Эта формула написана в системе покоя мюона, и в ней пренебрежено m_e^2 по сравнению с m_μ^2 .

В предельном случае достаточно малых энергий фотона в (147,6) можно опустить последние два члена, а в первом положить $q = p_\mu - p_e$. В соответствии с результатами § 95 выражение (147,6) разбивается тогда на произведение $d\omega_{p_e k} = d\omega_{p_e} d\omega_k$ вероятности «упругого» процесса (вероятность распада мюона без испускания фотона) и множителя

$$d\omega_k = -\alpha \left[\frac{p_e}{(p_e k)} - \frac{p_\mu}{(p_\mu k)} \right]^2 \frac{d^3 k}{4\pi^2 \omega}. \quad (147,7)$$

Последний совпадает с деленной на ω интенсивностью классического излучения при рождении заряженной частицы (см. II, задача к § 69). Заимствовав отсюда же результат интегрирования по углам вылета фотона, получим (при $\epsilon_e \gg m_e$)

$$d\omega_\omega = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{2\epsilon_e}{m} - 1 \right) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (147,8)$$

Во втором порядке по электромагнитному взаимодействию реальному процессу отвечают диаграммы, описывающие испускание одновременно двух фотонов при распаде мюона. Остальные диаграммы этого порядка дают радиационные поправки

к вероятности распада. Сюда относятся диаграммы вида

$$(147,9)$$

Первая из них (поправка к четырехфермионной вершине) дает в амплитуду процесса вклад, равный

$$M_{fi}^{(a)} = \frac{ie^2 G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{\nu_\mu} O_\alpha u_{\nu_e}) (\bar{u}_e Q^\alpha u_\mu),$$

где

$$Q^\alpha = \int \frac{\gamma^\beta (\hat{p}_e + \hat{f} + m_e) O^\alpha (\hat{p}_\mu + \hat{f} + m_\mu) \gamma_\beta}{[(p_e + f)^2 - m_e^2][(p_\mu + f)^2 - m_\mu^2](f^2 - \lambda^2)} \frac{d^4 f}{4\pi^3}; \quad (147,10)$$

«масса фотона» λ введена для устранения инфракрасной расходимости. Интеграл (147,10) логарифмически расходится на больших f . Поэтому при прямом его вычислении по правилам § 127 следует ввести в явном виде обрезание на больших импульсах виртуального фотона, т. е. ограничить область интегрирования по $d^4 f$ условием ¹⁾

$$|f^2| \leq \Lambda^2, \quad \Lambda^2 \gg m_\mu^2.$$

После этого $M_{fi}^{(a)}$ будет зависеть от $\ln \Lambda$. Эта зависимость устраняется перенормировкой внешних концов диаграммы, т. е. учетом диаграмм (147,9, б—в). Согласно § 107 (см. (107,15)) эта перенормировка сводится к замене амплитуды нулевого приближения $M_{fi}^{(0)}$ на

$$M_{fi}^{(0)} \sqrt{Z_{1e} Z_{1\mu}} \approx M_{fi}^{(0)} \left(1 + \frac{1}{2} Z_{1e}^{(1)} + \frac{1}{2} Z_{1\mu}^{(1)} \right),$$

где $Z_{1e} = 1 + Z_{1e}^{(1)}$, $Z_{1\mu} = 1 + Z_{1\mu}^{(1)}$ — перенормировочные константы (вычеты в полюсах электронного и мюонного пропагаторов). Другими словами, вклад диаграмм (147,3, б) и (147,9, в) в

¹⁾ Аналогичный интеграл (114,3) (поправка к формфактору электрона) вычислялся в § 114 дисперсионным методом.

амплитуду равен

$$M_{fi}^{(c)} + M_{fi}^{(e)} = M_{fi}^{(0)} \frac{1}{2} (Z_{1e}^{(1)} + Z_{1\mu}^{(1)}). \quad (147,11)$$

Согласно (116,7а), константа

$$Z_{1e}^{(1)} = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2} + \frac{9}{4} + \ln \frac{\lambda^2}{m_e^2} \right],$$

и аналогично для $Z_{1\mu}^{(1)}$, с заменой m_e на m_μ .

Таким образом, регуляризованная поправка к амплитуде распада мюона

$$\delta M_{fi} = M_{fi}^{(a)} + M_{fi}^{(c)} + M_{fi}^{(e)}.$$

Эта величина уже не содержит Λ и, таким образом, является конечной ¹⁾. Отметим, что ее матричная структура отлична от структуры амплитуды $M_{fi}^{(0)}$, не возмущенной электромагнитным взаимодействием. В этом смысле можно сказать, что радиационные поправки нарушают «универсальный» характер слабого ($V - A$)-взаимодействия.

Амплитуда $M_{fi} = M_{fi}^{(0)} + \delta M_{fi}$ зависит от «массы фотона» λ . Для устранения этой зависимости надо, как обычно, добавить к вероятности распада вероятность распада с одновременным испусканием фотона массы λ ; в суммарной вероятности можно перейти к пределу $\lambda \rightarrow 0$. В аналогичных случаях ранее (§§ 119, 130) мы производили эту процедуру, считая фотоны мягкими, с энергией, меньшей некоторого малого ω_{\max} . В данном случае, однако, с точки зрения реальной постановки эксперимента более интересной величиной является полная вероятность распада с учетом возможного испускания фотонов любых (а не только малых) энергий. Такая вероятность дается суммой выражения (146,1), в котором для квадрата амплитуды надо подставить

$$|M_{fi}|^2 \approx |M_{fi}^{(0)}|^2 + (M_{fi}^{(0)} \delta M_{fi}^* + M_{fi}^{(0)*} \delta M_{fi}),$$

и выражения (147,6); последнее должно быть проинтегрировано по $d^3 k$ в предположении $k^2 = \lambda^2$. Это интегрирование весьма сложно, как и вычисление интеграла (147,10).

Мы приведем лишь окончательный результат для распределения электронов по энергиям при распаде неполяризованного мюона (μ^+ или μ^-), просуммированного по поляризациям электрона:

$$d\omega_e = \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} h(x) \right] d\omega_e^{(0)}, \quad (147,12)$$

¹⁾ Можно показать, что такое сокращение происходит и в более высоких приближениях по электромагнитному взаимодействию.

где $d\omega_e^{(0)}$ — распределение (146,9), а функция $h(x)$ равна

$$h(x) = -4F(-x) - \frac{2\pi^2}{3} + 3L - 4 + 2 \ln x [3 \ln(1-x) - 2 \ln x - 2L + 1] + 2 \left(2L - 1 - \frac{1}{x}\right) \ln(1-x) + \frac{6(1-x)}{3-2x} \ln x + \frac{(1-x)}{3x^2(3-2x)} [(5 + 17x - 34x^2)(L + \ln x) - 22x + 34x^2],$$

где $x = \epsilon_e/\epsilon_{\max}$, $L = \ln(m_\mu/m_e)$, а $F(x)$ — функция Спенса (127,19) (S. M. Berman, 1958). Формулы написаны при условии $m_e/\epsilon_e \ll 1$ с пренебрежением

Таблица 3

x	$100 \frac{\alpha}{2\pi} h(x)$	x	$100 \frac{\alpha}{2\pi} h(x)$
0,2	9,69	0,7	-0,23
0,3	5,54	0,8	-1,42
0,4	3,43	0,9	-3,06
0,5	2,01	0,94	-4,16
0,6	0,85	0,98	-6,45

всеми членами, стремящимися к нулю при $m_e \rightarrow 0$. Несколько численных значений функции $h(x)$ приведены в таблице. При $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow 1$ функция $h(x)$ неограниченно возрастает (соответственно как $x^{-2} \ln x$ и как $\ln(1-x)$); тем самым нарушается применимость формул теории возмущений. Интегральная (по всем энергиям) вероятность распада остается, однако, конечной; радиационная поправка ко времени жизни мюона оказывается равной $\delta\tau = +4,4 \cdot 10^{-3}\tau_0$, где τ_0 — время жизни, вычисленное без учета поправок.

Тем самым подразумевается, в частности, пренебрежение влиянием на рассматриваемый процесс электромагнитного взаимодействия между частицами (если оно есть).

§ 148. Кинематическая структура адронного слабого тока

Амплитуду процесса, в котором наряду с лептонами участвуют также и адроны, можно представить в виде

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} \langle l_f | j_w | l_i \rangle \langle h_f | J_w | h_i \rangle, \quad (148,1)$$

где первый множитель — лептонный ток перехода, а второй — адронный слабый ток перехода (l_i, h_i и l_f, h_f — соответственно начальные и конечные лептон и адрон). Эти множители предполагаются независимыми друг от друга в том смысле, что каждый из них как функция своих независимых переменных (4-импульсов и спиральностей) не зависит от рода частиц, между которыми происходит переход во втором множителе¹⁾. Естественно

¹⁾ Тем самым подразумевается, в частности, пренебрежение влиянием на рассматриваемый процесс электромагнитного взаимодействия между частицами (если оно есть).

полагать при этом, что лептонный матричный элемент имеет тот же вид, что и при чисто лептонных реакциях. Что же касается адронного слабого тока, то к нему относится все сказанное в начале § 139 по поводу адронного электромагнитного тока: он отделен от вклада, вносимого в него виртуальными сильными взаимодействиями.

Выясним, что можно сказать о свойствах адронного тока перехода исходя из одних лишь феноменологических соображений. Помимо чисто кинематических требований мы используем также и тот факт, что амплитуда реакции может зависеть лишь от суммарного 4-импульса образующихся лептонов (а не от 4-импульса каждого из них в отдельности). Это требование является выражением (в импульсном представлении) отмеченного уже в § 145 свойства «локальности» гамильтониана слабого взаимодействия лептонов.

Рассмотрим последовательно различные типы реакций.

1) Распад мезона на лептоны:

$$\pi^\pm \rightarrow l^\pm + \nu_l(\bar{\nu}_l), \quad K^\pm \rightarrow l^\pm + \nu_l(\bar{\nu}_l)$$

(где $l = e$ или μ). Будем для определенности говорить о распаде

$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e. \quad (148,2)$$

Для составления адронного тока в нашем распоряжении имеется лишь псевдоскаляр u_π — амплитуда волновой функции мезона — и 4-вектор $q = p_\mu + p_\nu$ — суммарный 4-импульс лептонов¹⁾. Построенный из них 4-вектор тока перехода:

$$\langle 0 | J_w^\alpha | \pi \rangle = f u_\pi q^\alpha, \quad (148,3)$$

где f — инвариантный коэффициент (формфактор), сводящийся в данном случае к постоянной, поскольку постоянен единственный инвариант, от которого он мог бы зависеть: $q^2 = p_\pi^2 = m_\pi^2$. Отметим также, что значения q^2 и $f(q^2)$ не зависят от массы возникающего лептона l , а потому одинаковы для распадов $\pi \rightarrow e + \nu$ и $\pi \rightarrow \mu + \nu$ ²⁾.

Перемножив (148,3) с лептонным током перехода

$$\langle e | j_w^\alpha | \nu \rangle = \bar{u}_e \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) u_\nu,$$

получим амплитуду распада

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} f u_\pi (\bar{u}_e \hat{q} (1 + \gamma^5) u_\nu).$$

¹⁾ Волновые амплитуды частиц со спином 0 предполагаются нормированными условиями $u_\pi u_\pi^* = 1$ (§ 10). При конкретных расчетах вероятностей распада можно полагать просто $u_\pi = 1$.

²⁾ Формфактор f имеет размерность массы. Эмпирические значения: $|f_\pi| = 0,94 m_\pi$, $|f_K| = 0,072 m_K$, $|f_\pi|/|f_K| = 3,7$

Наконец, написав $q = p_e + p_\nu$ и воспользовавшись уравнениями Дирака для электрона и нейтрино

$$\bar{u}_e \hat{p}_e = m_e \bar{u}_e, \quad \hat{p}_\nu u_\nu = 0,$$

найдем

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} f u_\pi m_e (\bar{u}_e (1 + \gamma^5) u_\nu). \quad (148,4)$$

Электрон, вылетающий в распаде (148,2), полностью поляризован, причем знак его спиральности совпадает со знаком спиральности \bar{v}_e . Действительно, при двухчастичном распаде спиральности частиц связаны соотношением $\lambda_\pi = \lambda_e - \lambda_0$ (см. (70,12)); поскольку в данном случае $\lambda_\pi = 0$, то $\lambda_e = \lambda_0 = 1/2$ (аналогично для вылетающего позитрона: $\lambda_\pi = \lambda_\nu = -1/2$). Таким образом, поляризация электрона имеет «вынужденный» характер, однозначно определяясь сохранением момента. Отметим связь между этим обстоятельством и наличием множителя m_e в (148,4). В конце § 146 было указано, что структура слабого тока лептонов такова, что в пределе $m_e \rightarrow 0$ возникающий электрон имеет спиральность $\lambda_e = -1/2$; поэтому вероятность распада, в котором должно быть $\lambda_e = 1/2$, в пределе $m_e \rightarrow 0$ должна обратиться в нуль.

2) Распад мезона на другой мезон и лептоны:

$$\pi^\pm \rightarrow \pi^0 + l^\pm + \nu_l (\bar{\nu}_l), \quad (148,5)$$

где снова $l = e$ или μ (другой пример: $K^\pm \rightarrow \pi^0 + l^\pm + \nu_l (\bar{\nu}_l)$). Адронный ток перехода должен быть составлен из псевдоскаляров u_{π^0} и u_{π^\pm} — волновых амплитуд — мезонов и из имеющихся в нашем распоряжении 4-импульсов. К числу последних относятся 4-импульсы начального (p_1) и конечного (p_2) мезонов, а также суммарный 4-импульс лептонов q ; в силу закона сохранения $p_1 = p_2 + q$ лишь два из них независимы. Общий вид матричного элемента:

$$\langle \pi^0 | J_w^\alpha | \pi^\pm \rangle = u_{\pi^0}^* u_{\pi^\pm} (f_1 P^\alpha + f_2 q^\alpha) \quad (148,6)$$

где $P = p_1 + p_2$, а f_1, f_2 — инвариантные функции 4-импульсов (формфакторы). Из p_1 и p_2 можно составить всего один независимый инвариант (не сводящийся к постоянной), например q^2 . Поэтому f_1, f_2 — функции одной независимой переменной.

Обратим внимание на то, что ток (148,6) (то же самое относится и к (148,3)) имеет вполне определенный пространственно-временной характер; при одинаковых внутренних четностях обоих мезонов ток (148,6) — истинный 4-вектор. Это обстоятельство связано с отсутствием у мезонов спина.

В распаде (148,5) поляризация лептона l (e или μ) не имеет «вынужденного» характера, как в распаде (148,2). Если $l = e$, то,

в пренебрежении массой электрона, e^- снова (как и в распаде мюона — § 146) будет автоматически иметь спиральность $-1/2$, а e^+ — спиральность $+1/2$. Исключения составляют лишь случаи, когда π^0 не уносит энергии, а e и ν летят в противоположные стороны; в приближении $m_e \rightarrow 0$ вероятность таких распадов должна, следовательно, обращаться в нуль.

3) Распад бариона на другой барион и лептоны, например β -распад нейтрона¹⁾:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (148,7)$$

Вопрос о виде адронного тока перехода для частиц со спином $1/2$ уже рассматривался нами в § 139 для электромагнитного случая. Тот факт, что там переход сопровождался испусканием одной частицы (фотона), а здесь — двух частиц (e и ν), несуществен, так как в ток может входить лишь суммарный 4-импульс лептонов q , и в этом смысле они эквивалентны одной частице. Ток перехода, однако, не должен удовлетворять теперь условию поперечности. В электромагнитном случае это условие связано с сохранением электрического заряда, в случае же слабых взаимодействий аналогичного закона сохранения, вообще говоря, нет (мы вернемся еще к этому вопросу в § 150). Кроме того, слабый ток может содержать как истинно векторные, так и псевдовекторные части.

Мы видели в § 113, что с помощью имеющихся в нашем распоряжении величин можно составить три независимых истинных 4-вектора, например:

$$\bar{u}_p \gamma^\alpha u_n, \quad (\bar{u}_p \sigma^{\alpha\beta} u_n) q_\beta, \quad (\bar{u}_p u_n) q^\alpha,$$

где u_n, u_p — волновые амплитуды начального (n) и конечного (p) бариона, а $q = p_p - p_n$. Аналогичным образом составляются 4-псевдовекторы, содержащие дополнительно матрицу γ^5 . В качестве трех независимых псевдовекторов выберем

$$\bar{u}_p \gamma^\alpha \gamma^5 u_n, \quad (\bar{u}_p \gamma^5 u_n) P^\alpha, \quad (\bar{u}_p \gamma^5 u_n) q^\alpha,$$

где $P = p_p + p_n$. Таким образом, общий вид барионного слабого тока перехода:

$$\langle p | J_w^\alpha | n \rangle = \bar{u}_p (f_1 \gamma^\alpha + f_2 \sigma^{\alpha\beta} q_\beta + f_3 q^\alpha) u_n + \bar{u}_p (g_1 \gamma^\alpha + g_2 P^\alpha + g_3 q^\alpha) \gamma^5 u_n. \quad (148,8)$$

Формфакторы $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ — функции инварианта q^2 .

¹⁾ Сюда же относятся распады гиперонов $\Lambda \rightarrow p + l^- + \bar{\nu}_p, \Sigma^+ \rightarrow \Lambda + l^+ + \nu_l$ и т. д.

З а д а ч и

1. Найти вероятности распадов $\pi \rightarrow \mu + \nu$ и $\pi \rightarrow e + \nu$.

Р е ш е н и е. Вероятность распада (в системе покоя пиона)

$$\omega = (2\pi)^4 \int \int \delta^{(4)}(p_\pi - p_l - p_\nu) \frac{|M_{fi}|^2}{2m_\pi} \frac{d^3 p_l}{(2\pi)^3 2\varepsilon_l} \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3 2\varepsilon_\nu}.$$

Квадрат $|M_{fi}|^2$ (M_{fi} из (148,3)), просуммированный по поляризациям лептона l :

$$\sum_{\text{поляризация}} |M_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2} |f|^2 m_l^2 \text{Sp} \hat{p}_\nu (1 + \gamma^5) (\hat{p}_l + m_l) (1 + \gamma^5) = 4G^2 m_l^2 (p_l p_\nu).$$

Это выражение сводится к постоянной, так как из $(p_l + p_\nu)^2 = p_\pi^2 = m_\pi^2$ следует, что

$$p_l p_\nu = \frac{1}{2} (m_\pi^2 - m_l^2).$$

Остается интеграл

$$I = \int \int \frac{d^3 p_l d^3 p_\nu}{\varepsilon_l \varepsilon_\nu} \delta^{(4)}(p_\pi - p_l - p_\nu) = \int \frac{d^3 p_\nu}{\varepsilon_l \varepsilon_\nu} \delta(m_\pi - \varepsilon_l - \varepsilon_\nu).$$

Заметив, что $|p_l| = |p_\nu| = \varepsilon_\nu$, имеем

$$I = \int \frac{4\pi \varepsilon_\nu^2 d\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu \varepsilon_l} \delta(m_\pi - \varepsilon_\nu - \varepsilon_l) = \frac{4\pi \varepsilon_\nu}{\varepsilon_l \frac{d}{d\varepsilon_\nu}(\varepsilon_\nu + \varepsilon_l)} = \frac{4\pi \varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu + \varepsilon_l} = 2\pi \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{m_\pi^2}.$$

Окончательно:

$$\omega = \frac{G^2 |f|^2}{8\pi} m_\pi m_l^2 \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2}\right)^2.$$

Отношение вероятностей двух распадов:

$$\frac{\omega(\pi \rightarrow e + \nu)}{\omega(\pi \rightarrow \mu + \nu)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 \approx 1,3 \cdot 10^{-4}.$$

Оно определяется одним только отношением m_e/m_μ .

2. Найти дифференциальную (по энергиям ε_π) вероятность распада $K^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e)$.

Р е ш е н и е. Адронный и лептонный токи перехода:

$$\langle \pi^0 | J_w | K^- \rangle = f_1 p_K + f_2 p_\pi = (f_1 + f_2) p_K - f_2 (p_e + p_\nu),$$

$$\langle e | j_w | \nu \rangle = \bar{u}_e \gamma (1 + \gamma^5) u_\nu.$$

Перемножая их, используя уравнения Дирака для u_e и u_ν и пренебрегая массой электрона по сравнению с массами m_π и m_K , найдем амплитуду распада¹⁾

$$M_{fi} = \sqrt{2} G f \bar{u}_e \hat{p}_K (1 + \gamma^5) u_\nu, \quad f = \frac{1}{2} (f_1 + f_2).$$

1) Для распада $K \rightarrow \pi + \mu + \nu$ аналогичного пренебрежения недостаточны, и в амплитуде остаются оба независимых фактора.

Вероятность распада (в системе покоя K):

$$d\omega = (2\pi)^{-5} \frac{|M_{fi}|^2}{2m_K} \frac{d^3 p_e}{2\varepsilon_e} \frac{d^3 p_\nu}{2\varepsilon_\nu} \frac{d^3 p_\pi}{2\varepsilon_\pi} \delta^{(4)}(p_K - p_\pi - p_e - p_\nu). \quad (1)$$

После суммирования по поляризациям:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{поляризация}} |M_{fi}|^2 &= 2G^2 |f|^2 \text{Sp} \hat{p}_\nu \hat{p}_K (1 + \gamma^5) \hat{p}_e \hat{p}_K (1 + \gamma^5) = \\ &= 4G^2 |f|^2 \text{Sp} \hat{p}_\nu \hat{p}_K \hat{p}_e \hat{p}_K = 16G^2 |f|^2 \{2(p_e p_K)(p_\nu p_K) - p_K^2(p_e p_\nu)\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Интегрирование по $d^3 p_e d^3 p_\nu$ производится с помощью (146,5–6) и дает в результате

$$d\omega = \frac{G^2 m_K}{12\pi^3} |f|^2 (\varepsilon_\pi^2 - m_\pi^2)^{3/2} d\varepsilon_\pi.$$

Энергия ε_π пробегает значения в интервале

$$m_\pi \leq \varepsilon_\pi \leq \frac{m_K^2 + m_\pi^2}{2m_K}.$$

Верхний предел отвечает случаю, когда e и ν летят в одну сторону (массой электрона везде пренебрегаем!). Напомним, что f — функция от $q^2 = (p_e + p_\nu)^2$ или, что то же, функция от ε_π (так как $q^2 = (p_K - p_\pi)^2 = m_K^2 + m_\pi^2 - 2m_K \varepsilon_\pi$). Если пренебречь этой зависимостью, то полная вероятность распада

$$\omega \approx \frac{G^2 |f|^2 m_K^2}{768\pi^3} \left(1 - 8 \frac{m_\pi^2}{m_K^2}\right).$$

3. Для того же распада найти спектр электронов при заданной энергии ε_π .

Р е ш е н и е. Раскрыв в (2) произведения 4-импульсов, подставив в (1) и проинтегрировав по $d^3 p_\nu$, получим

$$d\omega = \frac{G^2 |f|^2}{(2\pi)^5} m_K (\varepsilon_e \varepsilon_\nu + p_e p_\nu) \delta(\varepsilon_e + \varepsilon_\nu + \varepsilon_\pi - m_K) \frac{d^3 p_e d^3 p_\nu}{\varepsilon_e \varepsilon_\pi \varepsilon_\nu}.$$

Из равенства $p_e + p_\nu = -p_\pi$ имеем

$$p_e p_\nu = \frac{1}{2} \{p_\pi^2 - \varepsilon_e^2 - (m_K - \varepsilon_\pi - \varepsilon_e)^2\},$$

$$\varepsilon_e \varepsilon_\nu + p_e p_\nu = \frac{1}{2} \{p_\pi^2 - (m_K - \varepsilon_\pi - 2\varepsilon_e)^2\}.$$

Интегрирование по направлениям p_e и p_π сводится к вычислению интеграла

$$\int \delta(\varepsilon_e + \varepsilon_\pi + \sqrt{p_e^2 + p_\pi^2 + 2|p_e||p_\pi|\cos\theta} - m_K) d\cos\theta = \frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_e |p_\pi|}$$

(θ — угол между p_e и p_π). Окончательно:

$$d\omega = \frac{G^2 |f|^2 m_K}{8\pi^3} [p_\pi^2 - (m_K - \varepsilon_\pi - 2\varepsilon_e)^2] d\varepsilon_\pi d\varepsilon_e.$$

Энергия ε_e при заданном ε_π меняется в пределах

$$\frac{1}{2} (m_K - \varepsilon_\pi - |p_\pi|) \leq \varepsilon_e \leq \frac{1}{2} (m_K - \varepsilon_\pi + |p_\pi|).$$

§ 149. Вещественность формфакторов

Матричный элемент перехода M_{fi} (148,1) соответствует первому приближению теории возмущений (по слабому взаимодействию). Поэтому матрица M_{fi} эрмитова: $M_{fi}^* = M_{if}$. Это значит, что и для входящих в (148,1) токов перехода комплексное сопряжение превращает их в токи обратных переходов.

Так, для β -распада нейтрона (148,7)

$$\langle e | j_w | \nu \rangle^* = \langle \nu | j_w | e \rangle, \quad \langle p | J_w | n \rangle^* = \langle n | J_w | p \rangle. \quad (149,1)$$

Для лептонных токов перехода, дающихся выражениями

$$\langle e | j_w | \nu \rangle = \bar{u}_e O u_\nu, \quad \langle \nu | j_w | e \rangle = \bar{u}_\nu O u_e,$$

соотношение (149,1) выполняется автоматически. Для адронного же тока перехода, записанного в виде $\langle p | J | n \rangle = (\bar{u}_p \Gamma u_n)$, получаем

$$\langle n | J_w | p \rangle = (\bar{u}_p \Gamma u_n)^* = \bar{u}_n \bar{\Gamma} u_p, \quad \bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^+ \gamma^0.$$

С матрицей Γ из (148,8) имеем

$$\langle n | J_w^\alpha | p \rangle = \bar{u}_n (f_1^* \gamma^\alpha - f_2^* \sigma^{\alpha\beta} q_\beta + f_3^* q^\alpha) u_p + \bar{u}_n (g_1^* \gamma^\alpha - g_2^* P^\alpha - g_3^* q^\alpha) \gamma^5 u_p. \quad (149,2)$$

Таким образом, ток обратного перехода ($p \rightarrow n$) выражается с помощью комплексно-сопряженных формфакторов f^* , g^* . Поскольку, однако, прямой и обратный процессы различны ($n \rightarrow p$ и $p \rightarrow n$), то отсюда еще нельзя сделать никаких заключений о свойствах самих формфакторов¹⁾.

Такие заключения можно, однако, сделать, если потребовать дополнительно CP -инвариантности (или, что то же, T -инвариантности) взаимодействия²⁾. Сформулируем это условие (вместе с условием эрмитовости M_{fi}) в терминах ψ -операторов.

Тот факт, что речь идет о первом порядке теории возмущений, означает, что амплитуды переходов M_{fi} и M_{if} должны быть матричными элементами одного и того же эрмитова оператора — эффективного гамильтониана взаимодействия. Если ток пере-

¹⁾ Для электромагнитного тока перехода уже из эрмитовости M_{fi} следовала вещественность формфакторов (§§ 113, 139). Это было связано с тем, что речь шла о переходе (с испусканием фотона) без изменения частицы как таковой, и потому ее начальное и конечное состояния отличались только своими 4-импульсами.

²⁾ Во избежание недоразумений напомним, что для амплитуд переходов T -инвариантность означает равенство не прямого и обратного, а прямого и «обращенного во времени» процессов. Последний процесс отличается от «обратного» тем, что вместе с перестановкой начального и конечного состояний заменяются также 4-импульсы $p = (\epsilon, \rho)$ на «обращенные во времени» значения $p^T = (\epsilon, -\rho)$.

хода $\langle e | j_w | \nu \rangle$ — матричный элемент оператора $j_w = \bar{\psi}_e O \psi_\nu$, а $\langle p | J_w | n \rangle$ — некоторого оператора J_w^+ , то токи обратных переходов — матричные элементы операторов j_w^+ и J_w , а гамильтониан должен содержать оба их произведения:

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_w J_w^+ + j_w^+ J_w). \quad (149,3)$$

Оператор лептонного тока при CP -преобразовании становится равным

$$(j_w^0, \mathbf{J}_w)^{CP} = (-j_w^{0+}, \mathbf{J}_w^+)$$

(см. (145,15)). Гамильтониан (149,3) будет CP -инвариантным, если и для адронного тока

$$(J_w^0, \mathbf{J}_w)^{CP} = (-J_w^{0+}, \mathbf{J}_w^+). \quad (149,4)$$

Покажем, что для этого все формфакторы должны быть вещественными.

Току перехода (148,8) можно сопоставить оператор¹⁾

$$J_w^{\alpha+} = f_1 (\bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n) + f_2 (p_p^* - p_n)_\beta (\bar{\psi}_p \sigma^{\alpha\beta} \psi_n) + f_3 (p_p^* - p_n)^\alpha (\bar{\psi}_p \psi_n) + g_1 (\bar{\psi}_p \gamma^\alpha \gamma^5 \psi_n) + g_2 (p_p^* + p_n)^\alpha (\bar{\psi}_p \gamma^5 \psi_n) + g_3 (p_p^* - p_n)^\alpha (\bar{\psi}_p \gamma^5 \psi_n). \quad (149,5)$$

Здесь $p = i\partial$, $p^* = -i\partial$; индексы n и p у этих операторов указывают, что дифференцирования производятся по аргументам x соответственно в $\psi_n(x)$ и $\psi_p(x)$. При зарядовом сопряжении билинейные формы ψ -операторов преобразуются согласно (28,4). Операторы же p_n и p_p этим преобразованием не затрагиваются; мы, однако, заменим тождественно $p_p^* - p_n = -(p_p - p_n^*)$. Тогда

$$(J_w^{\alpha+})^C = -f_1 (\bar{\psi}_n \gamma^\alpha \psi_p) - f_2 (p_n^* - p_p)_\beta (\bar{\psi}_n \sigma^{\alpha\beta} \psi_p) + f_3 (p_n^* - p_p)^\alpha (\bar{\psi}_n \psi_p) + g_1 (\bar{\psi}_n \gamma^\alpha \gamma^5 \psi_p) - g_2 (p_n^* + p_p)^\alpha (\bar{\psi}_n \gamma^5 \psi_p) + g_3 (p_n^* - p_p)^\alpha (\bar{\psi}_n \gamma^5 \psi_p). \quad (149,6)$$

При инверсии (P) первые три члена преобразуются как истинный 4-вектор ($V^0, \mathbf{V} \rightarrow V^0, -\mathbf{V}$), а вторые три — как псевдовектор ($A^0, \mathbf{A} \rightarrow -A^0, \mathbf{A}$). Результат надо сравнить с выражением,

¹⁾ Очевидно, что законы преобразования тока не могут зависеть от вида функциональной зависимости формфакторов от инвариантной переменной q^2 . Для нахождения этих законов можно поэтому считать все f и g постоянными, что дает возможность написать явные выражения соответствующих операторов; никакого более далеко идущего смысла эти операторы, конечно, не имеют.

эрмитово-сопряженным оператору (149,5):

$$J^{\alpha} = f_1^* (\bar{\Psi}_n \gamma^{\alpha} \Psi_p) + f_2^* (p_n^* - p_p)_{\beta} (\bar{\Psi}_n \sigma^{\alpha\beta} \Psi_p) - f_3^* (p_n^* - p_p)^{\alpha} (\bar{\Psi}_n \Psi_p) + g_1^* (\bar{\Psi}_n \gamma^{\alpha} \gamma^5 \Psi_p) - g_2^* (p_n^* + p_p)^{\alpha} (\bar{\Psi}_n \gamma^5 \Psi_p) + g_3^* (p_n^* - p_p)^{\alpha} (\bar{\Psi}_n \gamma^5 \Psi_p). \quad (149,7)$$

Очевидно, что требуемое равенство (149,4) будет иметь место, если все f и g вещественны.

Аналогичным образом можно доказать вещественность обоих формфакторов f_1 и f_2 в (148,6). Отметим, однако, некоторую условность этих утверждений. Пространственно-временной характер тока (148,6) зависит от относительной четности мезонов: истинный 4-вектор при положительной и псевдовектор при отрицательной четности. В зависимости от этого требование CP -инвариантности приведет к вещественности или к мнимости f и g . Эта разница, однако, не отразится на физических результатах, поскольку общий фазовый множитель в токе исчезает при образовании $|M_{fi}|^2$. Таким образом, более точно — говорить об относительной вещественности формфакторов.

Напомним снова, что изложенные результаты основаны на использовании равенства $M_{fi}^* = M_{if}$, справедливого лишь в первом приближении теории возмущений. По отношению к слабому взаимодействию это условие всегда выполнено: все рассматриваемые распады — эффекты первого порядка по этому взаимодействию. Однако условие может нарушиться за счет других взаимодействий между продуктами распада. В рассмотренных нами до сих пор распадах взаимодействие в конечном состоянии может быть только электромагнитным. Хотя оно и велико по сравнению со слабым, но само по себе тоже мало; поэтому при его учете могли бы появиться лишь относительно малые мнимые части формфакторов¹⁾.

CP -инвариантность приводит, конечно, к равенству вероятностей распадов частиц и античастиц (с изменением знаков всех импульсов p и спиральностей λ). Мы видели в § 72, что времена жизни частицы и античастицы (т. е. суммарные вероятности их распадов по всем возможным каналам) должны строго совпадать уже в силу требования CPT -инвариантности. Для слабых распадов при эрмитовости M_{fi} можно утверждать, что это требование приводит и к равенству вероятностей распадов частицы и античастицы по отдельным каналам.

Пусть частица a с импульсом p и спиральностью λ распадается на совокупность частиц a' с импульсами p' и спирально-

¹⁾ Этот эффект усиливается, однако, в β -распадах ядер с большим зарядом. Положение меняется и в нелептонных распадах адронов, когда в конечном состоянии возникают две или более сильно взаимодействующих частицы, см. § 153.

стями λ' . В силу CPT -инвариантности будет

$$\langle a', p', \lambda' | M | a, p, \lambda \rangle = \langle \bar{a}, p, -\lambda | M | \bar{a}', p', -\lambda \rangle,$$

где \bar{a} , \bar{a}' — античастицы. Если к тому же и $M_{fi}^* = M_{if}$, то это равенство можно переписать в виде, связывающем амплитуды распадов частиц a и \bar{a} :

$$\langle a', p', \lambda' | M | a, p, \lambda \rangle = \langle \bar{a}', p', -\lambda' | M | \bar{a}, p, -\lambda \rangle^*. \quad (149,8)$$

Отсюда следует равенство дифференциальных вероятностей распадов (в системе покоя a или a'):

$$dw(a, \lambda \rightarrow a', p', \lambda') = dw(\bar{a}, -\lambda \rightarrow \bar{a}', p', -\lambda'), \quad (149,9)$$

а после усреднения по направлениям вылета и по поляризациям — такое же равенство для интегральных вероятностей. Возникают также определенные связи между поляризациями частиц.

Для иллюстрации приведем распады

$$K^- \rightarrow \pi^0 + \mu^- + \bar{\nu}_{\mu}, \quad K^+ \rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu_{\mu}.$$

Наряду с равенством их полных вероятностей, CPT -инвариантность приводит к равенству $\xi_{\mu^+} = -\xi_{\mu^-}$ между поляризациями мюонов в обоих случаях. Добавление требования T -инвариантности приводит к запрещению поляризации мюона в направлении $[p_{\pi} p_{\mu}]$.

§ 150. Изотопические свойства адронного слабого тока

Гипотеза *универсальности* слабых взаимодействий состоит в утверждении, что слабые токи перехода для всех частиц имели бы одинаковый вид при «выключенном» сильном взаимодействии. Хотя в отсутствие последовательной теории трудно сформулировать точно смысл этого утверждения, из него можно все же извлечь некоторые конкретные следствия.

Ряд результатов может быть получен путем использования в этой связи изотопической симметрии сильных взаимодействий (в пренебрежении электромагнитными эффектами, нарушающими эту симметрию) (*S. Weinberg, 1958; T. D. Lee, C. N. Yang, 1962*). Так, в распадах $\Sigma^{\pm} \rightarrow \Lambda + e^{\pm} + \nu_e (\bar{\nu}_e)$ гипероны Σ^+ и Σ^- относятся к одному изотриплету ($T_3 = 1$ и $T_3 = -1$), а Λ — изосинглет. Поворот на 180° вокруг оси x^2 в изопространстве меняет знаки всех T_3 , так что $\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^-$, $\Lambda \rightarrow \Lambda$. Поскольку «затравочные» слабые токи переходов $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda$ и $\Sigma^- \rightarrow \Lambda$ универсальны, то в силу изотопической симметрии должно быть

$$\langle \Lambda | J_w | \Sigma^+ \rangle = \langle \Lambda | J_w | \Sigma^- \rangle. \quad (150,1)$$

Тот же поворот, примененный к изодублету нуклонов, превращает нейтрон и протон друг в друга. Поэтому ток перехода $\langle n | J_w | p \rangle$ может быть получен из тока $\langle p | J_w | n \rangle$ путем взаимной замены индексов n и p у всех величин (волновых амплитуд u и 4-импульсов p). Произведя такую замену в (148,8), найдем

$$\langle n | J_w^\alpha | p \rangle = \bar{u}_n (f_1 \gamma^\alpha - f_2 \sigma^{\alpha\beta} q_\beta - f_3 q^\alpha) u_p + \bar{u}_n (g_1 \gamma^\alpha + g_2 P^\alpha - g_3 q^\alpha) \gamma^5 u_p,$$

где q по-прежнему определено как $q = p_p - p_n$. Это выражение совпадает с (149,2), если f_1, f_2, g_1, g_3 вещественны, а f_3, g_2 мнимы. Но мы видели, что в силу CP -инвариантности должны быть вещественными все формфакторы. Таким образом, изотопическая симметрия приводит к результату, что

$$f_3 = g_2 = 0. \quad (150,2)$$

Рассматривая нейтрон и протон как два изотопических состояния одной частицы — нуклона, надо записать ток перехода (148,8) в виде

$$\langle p | J_w^\alpha | n \rangle = \chi_2^* \bar{u}_2 (f_1 \gamma^\alpha + f_2 \sigma^{\alpha\beta} q_\beta + f_3 q^\alpha) T_- u_1 \chi_1 + \chi_2^* \bar{u}_2 (g_1 \gamma^\alpha + g_2 P^\alpha + g_3 q^\alpha) \gamma^5 T_- u_1 \chi_1. \quad (150,3)$$

В него введен оператор $T_- = T_1 - iT_2$ (132,5), превращающий нейтрон в протон; он действует на изоспинор χ , определяющий изотопическое состояние нуклона (для тока обратного перехода $p \rightarrow n$ вместо T_- должен был бы стоять T_+). Таким образом, по своим изотопическим свойствам нуклонный слабый ток является компонентой изовектора.

Ввиду близости масс нейтрона и протона энергия, освобождающаяся при β -распаде нейтрона, относительно очень мала. Вместе с ней мала также и величина q^2 . Пренебрегая членами $\sim q^2$, мы можем заменить все коэффициенты f, g в (150,3) (функции от q^2) их значениями при $q^2 = 0$.

С той же точностью электромагнитные токи перехода протона и нейтрона имеют согласно (139,8) вид

$$\langle p | J^\alpha | p \rangle = \bar{u}_2 \left[\gamma^\alpha - \frac{1,79}{2m_p} \sigma^{\alpha\beta} q_\beta \right] u_1, \quad \langle n | J^\alpha | n \rangle = \bar{u}_2 \frac{1,91}{2m_p} \sigma^{\alpha\beta} q_\beta u_1, \quad (150,4)$$

где $u_1 = u(p_1)$, $u_2 = u(p_2)$, $q = p_2 - p_1$, m_p — масса протона. Вспомнив, что в нуклонном изодублете протон имеет проекцию изоспина $T_3 = 1/2$, а нейтрон $T_3 = -1/2$, можно записать оба выражения совместно в виде

$$\langle N | J_\alpha | N \rangle = \frac{1}{2} \chi_2^* \bar{u}_2 \left[\gamma^\alpha + \frac{0,12}{2m_p} \sigma^{\alpha\beta} q_\beta \right] u_1 \chi_1 + \frac{1}{2} \chi_2^* \bar{u}_2 \left[\gamma^\alpha - \frac{3,70}{2m_p} \sigma^{\alpha\beta} q_\beta \right] T_3 u_1 \chi_1, \quad (150,5)$$

где $T_3 = 1/2 \tau_3$. Первый член в этом выражении — изоскаляр, а второй — компонента изовектора.

Сравним последний с истинно векторной (V) частью слабого тока переходов $n \rightarrow p$ и $p \rightarrow n$ (первая строка выражения (150,3)):

$$\langle p | J_w^\alpha | n \rangle^V = \chi_2^* \bar{u}_2 (f_1 \gamma^\alpha + f_2 \sigma^{\alpha\beta} q_\beta + f_3 q^\alpha) T_- u_1 \chi_1, \quad (150,6)$$

$$\langle n | J_w^\alpha | p \rangle^V = \chi_2^* \bar{u}_2 (f_1 \gamma^\alpha + f_2 \sigma^{\alpha\beta} q_\beta + f_3 q^\alpha) T_+ u_1 \chi_1.$$

Эти три тока одинаковы по своим пространственно-временным свойствам, а по изотопическим — являются различными компонентами изовектора. Все они происходят из одного и того же «затравочного» тока

$$\chi_2^* \bar{u}_2 \gamma^\alpha T u_1 \chi_1.$$

Представляется естественным (и подтверждается опытом) предположение, что это — три компоненты одного и того же изовектора, а потому¹⁾

$$f_1 = 1, \quad f_2 = -\frac{3,70}{2m_p}, \quad f_3 = 0. \quad (150,7)$$

Равенство $f_3 = 0$ было уже получено выше как следствие требований изотопической симметрии. Обратим внимание на то, что в силу этого равенства векторная часть слабого тока оказывается (вместе с электромагнитным током) поперечной по отношению к 4-вектору q , т. е. сохраняющейся.

Таким образом, истинно векторная часть слабого тока перехода нейтрона в протон равна

$$\langle p | J_w^\alpha | n \rangle^V = \bar{u}_p \left(\gamma^\alpha - \frac{3,70}{2m_p} \sigma^{\alpha\beta} q_\beta \right) u_n. \quad (150,8)$$

Аналогичные заключения могут быть сделаны по отношению к токам перехода мезонов в распадах

$$\pi^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu_e (\bar{\nu}_e). \quad (150,9)$$

Мезоны π^+ , π^0 , π^- — члены одного изотриплета, отвечающие проекциям изоспина $T_3 = +1, 0, -1$. Соответствующие изотопические состояния описываются изовекторами χ с компонентами

$$\chi^+ = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^0 = i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi^- = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (150,10)$$

¹⁾ Эта гипотеза была высказана С. С. Герштейном и Я. Б. Зельдовичем (1955) и Фейнманом и Гелл-Манном (1957).

(ср. (16,21)). Действие оператора изоспина ($T = 1$) на изовектор определяется формулой

$$(T_i \chi)_k = -ie_{ikl} \chi_l$$

(ср. (16,19)). С ее помощью легко найти, что

$$T_+ |\pi^- \rangle = -\sqrt{2} |\pi^0 \rangle, \quad T_- |\pi^+ \rangle = -\sqrt{2} |\pi^0 \rangle,$$

где $T_{\pm} = T_1 \pm iT_2$. Поэтому слабые токи переходов $\pi^{\pm} \rightarrow \pi^0$ (148,6) можно записать совместно в виде

$$\langle \pi^0 | J_w^{\alpha} | \pi^{\pm} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_1 P^{\alpha} + f_2 q^{\alpha}) \chi_2^* T_{\mp} \chi_1 \quad (150,11)$$

(волновые амплитуды мезонов в (148,6) положены равными единице).

Электромагнитные же токи переходов $\pi^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm}$ можно записать с помощью диагонального оператора T_3 в виде

$$\langle \pi | J^{\alpha} | \pi \rangle = F(q^2) P^{\alpha} \chi^* T_3 \chi \quad (150,12)$$

(ср. (139,5)); для истинно нейтрального π^0 этот ток, естественно, обращается в нуль. Следуя той же гипотезе, предполагаем токи (150,11), (150,12) компонентами одного и того же изовектора. Сравнение коэффициентов в них дает тогда

$$f_1(q^2) = \sqrt{2} F(q^2), \quad f_2(q^2) = 0. \quad (150,13)$$

Малость энергии, освобождающейся в распаде (150,9), позволяет и здесь заменить $F(q^2)$ на $F(0) = 1$. Тогда слабый ток перехода равен просто

$$\langle \pi^0 | J_w^{\alpha} | \pi^{\pm} \rangle = \sqrt{2} (p_1^{\alpha} + p_2^{\alpha}). \quad (150,14)$$

З а д а ч а

Определить интегральную вероятность распада $\pi^{\pm} \rightarrow \pi^0 + e^{\pm} + \nu_e(\bar{\nu}_e)$.

Решение. Выделяемая при распаде энергия $\Delta = m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 4,6 \text{ Мэв} \ll m_{\pi}$. Поэтому в системе покоя π^+ можно считать покоящимся также и π^0 . Амплитуда распада (с мезонным током перехода из (150,14))

$$M_{fi} = G \bar{u}_e (\beta_1 + \beta_2) (1 + \gamma^5) u_{\nu} = 2m_{\pi} G \bar{u}_{\nu} \gamma^0 (1 + \gamma^5) u_e.$$

После суммирования по поляризациям электрона

$$\sum_{\text{поляризация}} |M_{fi}|^2 = 32m_{\pi}^2 G^2 (\epsilon_e \epsilon_{\nu} + p_e p_{\nu}).$$

Член с $p_e p_{\nu}$ исчезает при интегрировании по направлениям. Поэтому интегральная вероятность распада

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{(2\pi)^5 \cdot 16} \int \frac{|M_{fi}|^2}{\epsilon_{\nu} \epsilon_e m_{\pi}^2} \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_{\nu} - p_e) d^3 p_{\nu} d^3 p_e d^3 p_{\pi} = \\ &= \frac{2G^2}{(2\pi)^5} \int \delta(\epsilon_{\nu} + \epsilon_e - \Delta) d^3 p_e d^3 p_{\nu}. \end{aligned}$$

Считая, что $m_e \ll \Delta$, пренебрегаем при интегрировании массой электрона, т. е. заменяем $d^3 p_e \rightarrow 4\pi \epsilon_e^2 d\epsilon_e$ (как и $d^3 p_{\nu} \rightarrow 4\pi \epsilon_{\nu}^2 d\epsilon_{\nu}$). В результате получим

$$w = \frac{G^2 \Delta^5}{30\pi^3}.$$

§ 151. β-распад нейтрона

При вычислении вероятности распада нейтрона можно, с достаточной точностью, пренебречь в нуклонном токе не только величинами $\sim q^2$ (как уже сделано в (150,8)), но и величинами $\sim q$. Для полного слабого тока перехода (сумма векторной и псевдовекторной частей) будем иметь

$$\langle p | J_w^{\alpha} | n \rangle = \bar{u}_p \gamma^{\alpha} (1 + \alpha \gamma^5) u_n, \quad (151,1)$$

где обозначено $\alpha = g_1(0)$ (эмпирическое значение $\alpha = 1,2$); напомним, что $g_2 = 0$ в силу (150,2)¹).

Ввиду той же малости выделяемой энергии ($\Delta = m_n - m_p \approx 1,3 \text{ Мэв}$) при распаде покоящегося нейтрона можно считать покоящимся также и возникающий протон. Их волновые амплитуды будут тогда иметь вид (в стандартном представлении)

$$u_p = \sqrt{2m_p} \begin{pmatrix} w_p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_n = \sqrt{2m_n} \begin{pmatrix} w_n \\ 0 \end{pmatrix},$$

где w — нерелятивистские (двухкомпонентные) спиноры, нормированные на единицу. Прямым перемножением с матрицами γ из (21,20) и (22,18) найдем для нуклонного тока перехода

$$\langle p | J_w | n \rangle = 2 \sqrt{m_p m_n} (w_p^* w_n, -\alpha w_p^* \sigma w_n). \quad (151,2)$$

¹) Такого приближения для нуклонного тока недостаточно, однако, при вычислении вероятности реакции захвата мюона ($\mu^- + p \rightarrow n + \nu_{\mu}$). Если речь идет о захвате практически покоящегося μ^- в мезоатоме (водородоподобная система $p\mu^-$), то $q^2 = (p_n - p_p)^2 \approx -m_{\mu}^2$. Хотя поправки $\sim q^2$ в факторах все еще малы, но члены $\sim q$ в токе становятся значительными. Поэтому должны быть сохранены оба члена в (150,8) и оба члена в псевдовекторной части тока.

Его произведение с лептонным током перехода дает амплитуду распада ¹⁾

$$M_{fi} = \sqrt{2m_p m_n} G \{ (\omega_p^* \omega_n) (\bar{u}_e \gamma^0 (1 + \gamma^5) u_\nu) + \alpha (\omega_p^* \sigma \omega_n) (\bar{u}_e \boldsymbol{\gamma} (1 + \gamma^5) u_\nu) \}.$$

Квадрат амплитуды:

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 = & 2m_p m_n G^2 \cdot 2 \{ \text{Sp}(\rho_n \rho_p) \text{Sp}[\rho_e \gamma^0 \rho_\nu \gamma^0 (1 + \gamma^5)] + \\ & + \alpha^2 \text{Sp}(\rho_n \sigma_k \rho_p \sigma_i) \text{Sp}[\rho_e \gamma^i \rho_\nu \gamma^k (1 + \gamma^5)] + \\ & + \alpha \text{Sp}(\rho_n \sigma \rho_p) \text{Sp}[\rho_e \gamma^0 \rho_\nu \boldsymbol{\gamma} (1 + \gamma^5)] + \\ & + \alpha \text{Sp}(\rho_n \rho_p \sigma) \text{Sp}[\rho_e \boldsymbol{\gamma} \rho_\nu \gamma^0 (1 + \gamma^5)] \} \quad (151,3) \end{aligned}$$

($i, k = x, y, z$ — трехмерные векторные индексы).

Для матриц плотности ρ_e и ρ_ν надо подставить

$$\rho_e = \frac{1}{2} (\hat{p}_e + m_e) (1 + \hat{a}_e \gamma^5), \quad \rho_\nu = \hat{p}_\nu,$$

а для ρ_n, ρ_p — нерелятивистские поляризационные матрицы плотности

$$\rho_n = \frac{1}{2} (1 + \sigma \xi_n), \quad \rho_p = \frac{1}{2} (1 + \sigma \xi_p^{(d)}).$$

Не интересуясь сначала поляризациями электрона и протона, суммируем по ним. Тогда в (151,3) остаются следующие члены ²⁾:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{поляризация} \\ e, p}} |M_{fi}|^2 = & 4G^2 m_p m_n \{ \text{Sp} \hat{p}_e \gamma^0 \hat{p}_\nu \gamma^0 + \alpha^2 \text{Sp} \hat{p}_e \boldsymbol{\gamma} \hat{p}_\nu \boldsymbol{\gamma} + \\ & + i\alpha^2 (e_{ikl} \xi_{pl}^{(d)}) \text{Sp} \hat{p}_e \gamma^i \hat{p}_\nu \gamma^k \gamma^5 + 2\alpha \text{Sp} \hat{p}_e \gamma^0 \hat{p}_\nu (\xi_n \boldsymbol{\gamma}) \}. \end{aligned}$$

Простое вычисление следов приводит к результату

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{поляризация} \\ e, p}} |M_{fi}|^2 = & 16m_p^2 G^2 \varepsilon_e \varepsilon_\nu \{ 1 + 3\alpha^2 - (\alpha^2 - 1) \mathbf{v}_e \mathbf{v}_\nu - \\ & - 2\alpha(\alpha - 1) \mathbf{v}_e \xi_n + 2\alpha(\alpha + 1) \mathbf{v}_\nu \xi_n \}, \quad (151,4) \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}_e = \mathbf{p}_e / \varepsilon_e, \mathbf{v}_\nu = \mathbf{p}_\nu / \varepsilon_\nu$ — скорости e и ν ($|\mathbf{v}_\nu| = 1$), $m_p \approx m_n$ — масса нуклона.

¹⁾ Постоянная G , определенная из данных по β -распаду: $G = 1,41 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3$, т. е. несколько меньше значения (145,14) из данных о распаде мюона. Ввиду неопределенности радиационных поправок для адронов трудно сказать, чему должна быть приписана эта разница.

²⁾ Напомним формулы для следов произведений матриц Паули:

$$\begin{aligned} \text{Sp} \sigma_i &= 0, \quad \frac{1}{2} \text{Sp} \sigma_i \sigma_k = \delta_{ik}, \quad \frac{1}{2} \text{Sp} \sigma_i \sigma_k \sigma_l = i \varepsilon_{ikl} \\ \frac{1}{2} \text{Sp} \sigma_i \sigma_k \sigma_l \sigma_m &= \delta_{ik} \delta_{lm} - \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl} \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках определяет угловые распределения электрона и нейтрино. При распаде неполяризованного нейтрона корреляция между направлениями e и ν дается множителем

$$1 - \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} \mathbf{v}_e \mathbf{v}_\nu.$$

Угловое распределение электронов при распаде поляризованного нейтрона (при произвольном направлении нейтрино) пропорционально

$$1 - \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{1 + 3\alpha^2} \mathbf{v}_e \xi_n,$$

а аналогичное распределение для нейтрино

$$1 + \frac{2\alpha(\alpha + 1)}{1 + 3\alpha^2} \mathbf{v}_\nu \xi_n.$$

Снова (как и в § 146) отметим, что члены в (151,4), содержащие $\mathbf{v}_e \xi_n$ или $\mathbf{v}_\nu \xi_n$, меняют знак при инверсии ($\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}, \xi \rightarrow \xi$) и их наличие — результат несохранения четности. Укажем также, что отсутствие в (151,4) члена вида $\xi_n [\mathbf{v}_e \mathbf{v}_\nu]$ — следствие T -инвариантности: такой член менял бы знак при замене

$$\xi_n \rightarrow -\xi_n, \quad \mathbf{v}_e \rightarrow -\mathbf{v}_e, \quad \mathbf{v}_\nu \rightarrow -\mathbf{v}_\nu$$

(ср. (146,11)).

После усреднения по направлениям \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_ν выражение (151,4) становится равным

$$16m^2 G^2 (1 + 3\alpha^2) \varepsilon_e \varepsilon_\nu. \quad (151,5)$$

Дифференциальная вероятность распада

$$d\omega = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{|M_{fi}|^2}{2m} \delta^{(4)}(p_n - p_p - p_\nu - p_e) \frac{d^3 p_p}{2m} \frac{d^3 p_e}{2\varepsilon_e} \frac{d^3 p_\nu}{2\varepsilon_\nu}.$$

После интегрирования по $d^3 p_p d^3 p_\nu$ и по направлениям \mathbf{p}_e она дает распределение электронов по энергиям ¹⁾:

$$d\omega = \frac{G^2}{2\pi^3} (1 + 3\alpha^2) \sqrt{\varepsilon_e^2 - m_e^2} (\Delta - \varepsilon_e)^2 \varepsilon_e d\varepsilon_e. \quad (151,6)$$

Интегрирование по интервалу $m_e \leq \varepsilon_e \leq \Delta$ дает полную вероятность распада

$$\omega = C \frac{G^2 \Delta^5}{60\pi^3} (1 + 3\alpha^2). \quad (151,7)$$

где

$$C = \frac{1}{60} \left(2 \frac{\Delta^4}{m_e^4} - 9 \frac{\Delta^2}{m_e^2} - 8 \right) + \frac{\Delta}{4m_e} \text{Arch} \frac{\Delta}{m_e} = 0,47.$$

¹⁾ Распределение подобного вида для β -электронов было впервые получено Ферми (1934).

Для вычисления поляризации вылетающего при распаде электрона нет необходимости повторять заново все вычисления. Достаточно заметить, что лептонные следы в (151,3) при поляризованном электроном содержат 4-векторы p_e и a_e лишь в комбинации $p_e - m_e a_e$ (ср. § 146, где вычислялись следы такого же вида). Поэтому мы получим вероятность распада с заданной поляризацией $\xi_e^{(d)}$ электрона, заменив в (151,4)

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &\rightarrow \varepsilon_e - m_e a_e^0 = \varepsilon_e - p_e \xi_e^{(d)} = \varepsilon_e (1 - v_e \xi_e^{(d)}), \\ p_e &\rightarrow p_e - m_e \xi_e^{(d)} - \frac{p_e (p_e \xi_e^{(d)})}{m_e + \varepsilon_e}. \end{aligned} \quad (151,8)$$

Для распада неполяризованного нейтрона и после усреднения по направлениям v_n (151,4) сводится к (151,5) и содержит только ε_e . Произведя указанную замену, найдем, что вероятность распада пропорциональна

$$1 - v_e \xi_e^{(d)}.$$

Это значит, что поляризация электрона

$$\xi_e = -v_e \quad (151,9)$$

(Л. Д. Ландау, 1957).

Задачи

1. Определить поляризацию электрона при распаде неполяризованного нейтрона при заданном направлении v_n .

Решение. Произведя в (151,4) (с $\xi_n = 0$) замену (151,8), получим

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} v_e (n_e n_v) \right] \xi_e = \\ = \left[-v_e + \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} (n_e n_v) \right] n_e + \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} \frac{m_e}{\varepsilon_e} (n_v - n_e (n_e n_v)), \end{aligned}$$

где $n_v = v_v$, $n_e = v_e/v_e$.

2. Определить поляризацию электрона при распаде поляризованного нейтрона при произвольном направлении v_n .

Решение. Тем же способом получим

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{2\alpha(\alpha-1)}{1+3\alpha^2} v_e (n_e \xi_n) \right] \xi_e = \\ = \left[-v_e + \frac{2\alpha(\alpha-1)}{1+3\alpha^2} (n_e \xi_n) \right] n_e + \frac{2\alpha(\alpha-1)}{1+3\alpha^2} \frac{m_e}{\varepsilon_e} (\xi_n - n_e (n_e \xi_n)). \end{aligned}$$

3. Определить поляризацию протона отдачи при распаде неполяризованного нейтрона при произвольном направлении v_n .

Решение. При заданной поляризации протона $\xi_p^{(d)}$, после суммирования по поляризациям электрона и нейтрона и усреднения по направлениям

v_v , вместо фигурной скобки в (151,4) получим

$$\{1 + 3\alpha^2 + 2\alpha(\alpha+1) v_e \xi_p^{(d)}\}.$$

Отсюда

$$\xi_p = \frac{2\alpha(\alpha+1)}{1+3\alpha^2} v_e.$$

§ 152. Токи переходов в супермультиплете

Дальнейшие заключения о свойствах адронных слабых токов можно сделать, если допустить симметрию сильных взаимодействий по отношению к более широкой унитарной группе $SU(3)$ (N. Cabibbo, 1963).

Рассмотрим токи перехода между двумя адронными состояниями, относящимися к одному супермультиплету. Простейшим супермультиплетом является супертриплет гипотетических фундаментальных частиц — кварков. Очевидно, что слабым переходам между ними должны отвечать переходы

$$Q_n \rightarrow Q_p, \quad Q_\Lambda \rightarrow Q_p \quad (152,1)$$

(и обратные к ним), в которых меняется электрический заряд частицы. Действительно, адронный ток перехода определяет (вместе с соответствующим лептонным множителем) амплитуду вероятности лептонного распада адрона — распада с другой адрон и лептоны. В таком распаде лептоны уносят с собой определенный электрический заряд (± 1), а потому должен измениться и заряд адрона.

Трем кваркам Q_p, Q_n, Q_Λ отвечают суперспиноры ψ^a с компонентами

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Переходы (152,1) осуществляются операторами, действие которых на суперспинорные индексы состоит в замене $2 \rightarrow 1$ или $3 \rightarrow 1$, т. е. дается соответственно матрицами λ_1^2 или λ_1^3 , определенными в § 138. Обратным же переходам отвечают транспонированные матрицы $-\lambda_2^1$ или λ_3^1 . Напомним, что все эти матрицы — компоненты матричного суперспинора 2-го ранга λ_b^a .

Естественно принять, что вообще токи перехода внутри всякого супермультиплета являются такими же компонентами некоторого суперспинора, т. е. имеют вид

$$(J_w)_{fi} \equiv \langle h_f | J_w | h_i \rangle = \alpha (O_1^2)_{fi} \quad \text{или} \quad (J_w)_{fi} = \beta (O_1^3)_{fi}.$$

Комплексно-сопряженные же выражения дадут токи обратных

переходов (или прямых переходов с заменой частиц античастицами); они представляют собой $\frac{1}{2}$ - и $\frac{1}{3}$ - компоненты суперспинора.

Если потребовать CP -инвариантности взаимодействия, то отношение α/β должно быть вещественным (ср. § 149). Поскольку общая нормировка пока произвольна, положим $\alpha = 1$, а β запишем в виде $\beta = \text{tg } \vartheta$, где ϑ — вещественный параметр (*угол Кабиббо*). Для компактности запишем ток перехода в виде суммы

$$(J_w)_{fi} = (O_i^2)_{fi} + \text{tg } \vartheta (O_i^3)_{fi} \quad (152,2)$$

(хотя для каждого конкретного перехода фактически отличен от нуля либо один, либо другой из членов).

При переходе $Q_n \rightarrow Q_p$ электрический заряд Z меняется на 1, гиперзаряд Y не меняется, а проекция изоспина T_3 меняется на 1. Аналогичным свойством будут обладать все вообще переходы, описываемые первым членом в (152,2), поскольку оператор вида O_i^2 производит в суперспинорной волновой функции частицы замену $2 \rightarrow 1$ одного из ее индексов; при этом изменение изоспина может быть 0 или ± 1 .

При переходе же $Q_\Lambda \rightarrow Q_p$ вместе с зарядом Z испытывает такое же изменение гиперзаряд, а изоспин меняется на $1/2$. Таким образом, второй член в (152,2) отвечает переходам с изменением гиперзаряда (или, что то же, с изменением странности $S = Y - B$, поскольку барионное число B не меняется). Вместе с тем мы приходим к следующим правилам отбора при слабых переходах с изменением гиперзаряда¹⁾:

$$\Delta Y = \Delta Z = \pm 1, \quad (152,3)$$

$$|\Delta T| = 1/2. \quad (152,4)$$

Поскольку гиперзаряд сохраняется как в сильных, так и в электромагнитных взаимодействиях, то можно ожидать, что правило (152,3) будет нарушаться лишь в более высоких (чем первое) приближениях по слабому взаимодействию. Изоспин сохраняется в сильных, но не сохраняется в электромагнитных

¹⁾ Так, запрещен распад $\Xi^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$, в котором $\Delta Y = 2$, $\Delta Z = 1$. Разрешены распады

$$\Sigma^- \rightarrow n + l^- + \nu_l, \quad K^0 \rightarrow \pi^- + l^+ + \nu_l,$$

но запрещены

$$\Sigma^+ \rightarrow n + l^+ + \nu_l, \quad \bar{K}^0 \rightarrow \pi^- + l^+ + \nu_l \quad (l = e \text{ или } \mu)$$

($\Delta Z = -1$, $\Delta Y = 1$).

взаимодействиях. Поэтому можно ожидать, что правило (152,4) нарушается уже электромагнитными эффектами.

Простейший пример лептонных распадов адронов — распады

$$K^\pm \rightarrow l^\pm + \nu_l(\bar{\nu}_l), \quad \pi^\pm \rightarrow l^\pm + \nu_l(\bar{\nu}_l)$$

($l = e$ или μ), в которых мезон исчезает. Первый из них — переход с изменением, а второй — без изменения гиперзаряда. Оба мезона относятся к одному октету, отличаясь лишь значением одного индекса (равного 2 или 3) в их суперспинорной волновой функции (см. (137,11)). Поэтому

$$\langle 0 | O_i^3 | K^- \rangle = \langle 0 | O_i^2 | \pi^- \rangle$$

(для K^+ и π^+ надо было бы писать O_3^1 , O_2^1 вместо O_1^3 , O_1^2). Отсюда

$$\langle 0 | J_w | K^\pm \rangle = \text{tg } \vartheta \langle 0 | J_w | \pi^\pm \rangle. \quad (152,5)$$

Напишем явные выражения для токов перехода между компонентами супермультиплетта. Согласно (138,3) общий вид операторов O_i^2 и O_i^3 в их действии на суперспинорные волновые функции частиц:

$$(O_i^2)^\alpha = f^\alpha \Lambda_1^2 + g^\alpha \bar{\Lambda}_1^2, \quad (O_i^3)^\alpha = f^\alpha \Lambda_1^3 + g^\alpha \bar{\Lambda}_1^3; \quad (152,6)$$

4-векторный индекс α напоминает о том, что по своим пространственно-временным свойствам ток перехода — 4-вектор. При этом ток (а с ним и 4-векторы f^α и g^α) может содержать как истинно векторную, так и псевдовекторную части.

Ввиду сравнительной близости масс компонент супермультиплетта, в токах перехода между ними можно, в первом приближении, положить для передаваемого лептонам 4-импульса $q = 0$, как мы уже делали для переходов в изомультиплетте.

Рассмотрим сначала истинно векторную часть тока. При $q = 0$ истинный 4-вектор может иметь (в системе покоя распадающейся частицы) только временную составляющую (трехмерный скаляр) — просто потому, что при $q = 0$ в нашем распоряжении вообще не будет никакого трехмерного полярного вектора, характеризующего переход. Коэффициенты f^0 и g^0 (при $q = 0$), входящие во временную компоненту операторов (152,6), можно определить, если принять гипотезу о связи между слабым и электромагнитным токами, обобщающую гипотезу, сформулированную в § 150 для изотопической симметрии.

В § 144 было указано, что по отношению к группе симметрии $SU(3)$ электромагнитный ток перехода — 1-компонента суперспинора. При $q \rightarrow 0$ единственная отличная от нуля временная компонента этого тока сводится к заряду частицы,

оператор которого

$$O_i^1 = Z = \Lambda_i^1 - \bar{\Lambda}_i^1. \quad (152,7)$$

Если принять, что O_i^1, O_i^2, O_i^3 — компоненты одного и того же суперспинорного оператора, то сравнение коэффициентов в (152,7) и (152,6) даст $f^0 = -g^0 = 1$. Таким образом, временная составляющая слабого тока переходов будет

$$(J_w^0)_{fi} = \{(\Lambda_i^2 - \bar{\Lambda}_i^2)_{fi} + \text{tg } \vartheta (\Lambda_i^3 - \bar{\Lambda}_i^3)_{fi}\} (u_f^* u_i). \quad (152,8)$$

Здесь выделено произведение волновых амплитуд начальной и конечной частиц. Для мезонов (спин 0) можно положить $u_i = u_f = 1$; для неподвижных барионов (спин $1/2$) u_i и u_f сводятся к трехмерным спинорам w_i и w_f : $u \rightarrow \sqrt{2m} w$.

Далее, рассмотрим псевдовекторную часть тока. В пределе $q \rightarrow 0$ она имеет только пространственные компоненты, составляющие трехмерный аксиальный вектор $(J_w)_{fi}$; он может существовать лишь для частиц со спином (пусть это будет спин $1/2$). Действительно, для перехода между двумя покоящимися частицами со спином $1/2$ можно построить характерный трехмерный аксиальный вектор

$$\sigma_{fi} = w_f^* \sigma w_i. \quad (152,9)$$

Временная же составляющая 4-псевдовектора — трехмерный псевдоскаляр; но поскольку $q = 0$, то в нашем распоряжении нет полярного вектора, из которого вместе с аксиальным вектором (152,9) можно было бы построить псевдоскаляр.

Таким образом, пространственная составляющая тока

$$(J_w)_{fi} = \sigma_{fi} \{ [f (\Lambda_i^2)_{fi} + g (\bar{\Lambda}_i^2)_{fi}] + \text{tg } \vartheta [f (\Lambda_i^3)_{fi} + g (\bar{\Lambda}_i^3)_{fi}] \},$$

где мы обозначили $f_{fi} = f \sigma_{fi}$, $g_{fi} = g \sigma_{fi}$. Коэффициенты f и g , наряду с ϑ , остаются феноменологическими параметрами.

Задача

Найти слабые токи переходов в мезонном супероктете.

Решение. Ток перехода между двумя мезонами — истинный 4-вектор и потому имеет при $q = 0$ лишь временную составляющую. Недиагональные матричные элементы суперспинорных операторов вычисляются так же, как вычислялись в § 138 диагональные элементы. Имеем из (152,8):

$$(J_w^0)_{fi} = \{ (\bar{\psi}_f)_b^c (\lambda_i^2)_a^b (\psi_i)_c^a - (\bar{\psi}_f)_c^b (\lambda_i^2)_a^c (\psi_i)_b^a \} + \\ + \text{tg } \vartheta \{ (\bar{\psi}_f)_b^c (\lambda_i^3)_a^b (\psi_i)_c^a - (\bar{\psi}_f)_c^b (\lambda_i^3)_a^c (\psi_i)_b^a \}.$$

По этой формуле находим

$$\langle \pi^0 | J_w^0 | \pi^- \rangle = \sqrt{2}, \quad \langle \pi^0 | J_w^0 | K^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{tg } \vartheta.$$

§ 153. Кинематическая структура амплитуд нелептонных распадов

Для процессов слабого взаимодействия, происходящих без участия лептонов, чисто кинематические соображения позволяют сделать лишь очень общие заключения о виде амплитуды реакции. В этих случаях амплитуда не разбивается на произведение двух токов перехода, так что речь идет о непосредственном составлении скаляра (M_{fi}) из имеющихся в нашем распоряжении величин¹⁾.

Рассмотрим двухчастичные распады гиперонов на барион и мезон: $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-, \Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0, \Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$ и т. п. Будем для определенности говорить о распаде

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-. \quad (153,1)$$

Волновая амплитуда π -мезона — псевдоскаляр u_π , а амплитуды Ξ и Λ — биспиноры, которые мы обозначим через u_1 и u_2 . Из этих величин и одного независимого 4-импульса (например, $p_\pi = p_1 - p_2$) можно составить четыре скаляра:

$$\bar{u}_2 u_1, \quad \bar{u}_2 \gamma^5 u_1, \quad \bar{u}_2 \hat{p}_\pi u_1, \quad \bar{u}_2 \hat{p}_\pi \gamma^5 u_1.$$

Однако после использования уравнений Дирака ($\bar{u}_1 \hat{p}_1 = m_1 u_1$, $\hat{p}_2 u_2 = m_2 u_2$) вторая пара из них сводится к первой. Поэтому общий вид амплитуды распада

$$M_{fi} = G (\bar{u}_2 (f + g \gamma^5) u_1) u_\pi \quad (153,2)$$

(множитель G введен как коэффициент, определяющий порядок величины взаимодействия). При двухчастичном распаде все скалярные произведения 4-импульсов сводятся к постоянным (выражаются через массы частиц). Поэтому константами являются и коэффициенты f, g .

Число (два) независимых коэффициентов в (153,2) отвечает числу независимых спиральных амплитуд распада (при заданном значении полного момента системы $J = 1/2$, которое фиксируется спином распадающейся частицы). Выберем в качестве оси квантования спинов направление n вылетающего гиперона Λ . Поскольку спин π равен нулю, то спиральность (проекция спина на n) Λ совпадает со спиральностью Ξ . Другими словами, отличны от нуля лишь две спиральные амплитуды:

$$\langle 1/2, 0 | S | 1/2 \rangle \equiv (a + b) / \sqrt{2}, \quad \langle -1/2, 0 | S | -1/2 \rangle \equiv (a - b) / \sqrt{2}. \quad (153,3)$$

¹⁾ Напомним, что, говоря здесь просто о скалярах, мы не имеем в виду какого-либо определенного поведения по отношению к инверсии.

Если бы сохранялась пространственная четность, то эти две амплитуды могли бы отличаться лишь знаком; согласно (70,13) было бы

$$\langle 1/2 0 | S | 1/2 \rangle = \eta \langle -1/2 0 | S | -1/2 \rangle,$$

где $\eta = \eta_2 \eta_\pi / \eta_1 = \pm 1$, а η_1, η_2, η_π — внутренние четности частиц (так, полагая относительную внутреннюю четность Ξ и Λ положительной, а внутреннюю четность π отрицательной, будем иметь $\eta = -1$). Соответственно этому одна из двух величин

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \pi, s | S | \Xi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \langle 1/2 0 | S | 1/2 \rangle + \langle -1/2 0 | S | -1/2 \rangle \} \equiv a, \\ \langle \Lambda \pi, p | S | \Xi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \langle 1/2 0 | S | 1/2 \rangle - \langle -1/2 0 | S | -1/2 \rangle \} \equiv b \end{aligned} \quad (153,4)$$

представляет собой амплитуду распада с сохранением четности (b , если $\eta = -1$), а другая — с ее нарушением (a , если $\eta = -1$). Легко сообразить, что вне зависимости от значения η амплитуды a и b отвечают распаду с образованием системы $\Lambda + \pi$ в состоянии соответственно с положительной (s -волна; $l = J - 1/2 = 0$) и отрицательной (p -волна; $l = J + 1/2 = 1$) орбитальной четностью.

Характерная особенность рассматриваемых распадов состоит в том, что в конечном состоянии имеются две сильно взаимодействующие частицы. Это обстоятельство существенно при выяснении условий, налагаемых на амплитуду распада требованием CP - (или T -) инвариантности¹⁾. В § 149 уже было отмечено, что в таком случае матрица M_{fi} не должна быть эрмитовой. Мы можем теперь использовать лишь общее свойство унитарности S -матрицы. При этом необходимо учитывать не только прямую и обратную реакции, но и другие реакции (упругое рассеяние), которые могут иметь место между двумя конечными частицами²⁾.

Обозначим индексом 0 состояние $|\Xi\rangle$, а индексами 1 и 2 — состояния $|\Lambda \pi, s\rangle$ и $|\Lambda \pi, p\rangle$. Поскольку сильное взаимодействие сохраняет пространственную четность, то оно может приводить лишь к упругому $\Lambda \pi$ -рассеянию без изменения четности. Рассеяние же с изменением четности, как и распад $\Xi \rightarrow \Lambda + \pi$, — эффекты слабого взаимодействия. Поэтому все недиагональные элементы S -матрицы S_{ab} малы по сравнению с диагональными (в отношении $\sim G$).

Напишем условия унитарности S -матрицы:

$$\sum S_{ac} S_{bc}^* = \delta_{ab}.$$

¹⁾ Для распадов типа (153,1) нарушения сохранения CP -четности в настоящее время не обнаружено.

²⁾ Излагаемый подход к вопросу принадлежит Ферми (1953).

С точностью до величин первого порядка по G

$$S_{aa} S_{aa}^* = 1, \quad (153,5)$$

$$S_{aa} S_{ba}^* + S_{ab} S_{bb}^* = 0 \quad (a \neq b). \quad (153,6)$$

В соответствии с (153,5) представим амплитуды S_{aa} в виде

$$S_{aa} = e^{2i\delta_a}, \quad (153,7)$$

где $\delta_0 = 0$, а $\delta_1 = \delta_s$, $\delta_2 = \delta_p$ — фазы упругого s - и p -рассеяния. Теперь учтем условие T -инвариантности: $S_{ab} = S_{ba}$. Тогда из (153,6) получим

$$S_{ab} = \pm |S_{ab}| e^{i(\delta_a - \delta_b)}$$

с одинаковым для всех S_{ab} общим знаком (с верхним или нижним). Физический смысл имеют лишь относительные фазы различных амплитуд S_{ab} . Поэтому общий множитель $\pm i$ несуществен, и мы можем написать, в частности,

$$S_{10} \equiv a = |a| e^{i\delta_s}, \quad S_{20} \equiv b = |b| e^{i\delta_p}. \quad (153,8)$$

Таким образом, фазы амплитуд распада оказываются связанными с фазами упругого рассеяния.

В реакции (153,1) возникающая система $\Lambda + \pi$ имеет определенный изотопический спин $T = 1$, совпадающий с изоспином π . В других реакциях этого типа (например, $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$) система $N + \pi$ может находиться в изотопических состояниях с $T = 1/2$ и $T = 3/2$. Поскольку сильные взаимодействия сохраняют изоспин, то результат (153,8) остается справедливым и в этих случаях, причем индекс $a = 1, 2$ нумерует состояния системы $N + \pi$ с определенными пространственными четностями и определенными изоспинами.

Наконец, рассмотрим поляризационные и угловые корреляции в распаде гиперонов (*T. D. Lee, C. N. Yang, 1957*). С обозначениями a и b из (153,3) распадную часть S -матрицы (матрица по индексам спиральности начального и конечного барионов) можно представить в виде двухрядной матрицы $a \cdot 1 + b \cdot \sigma_z$ или

$$S = a \cdot 1 + b \cdot \sigma_n. \quad (153,9)$$

Вероятность распада получается усреднением произведений элементов S -матрицы по поляризационным состояниям обеих частиц:

$$w \propto \text{Sp}(S \rho_1 S^+ \rho_2), \quad (153,10)$$

где ρ_1, ρ_2 — поляризационные матрицы плотности начального и конечного барионов (ср. § 48, примечание на стр. 197). Напо-

ним, что рассматриваются состояния системы с определенными энергией и моментами, но без определенного импульса. Поэтому единственный имеющийся в нашем распоряжении вектор — вектор поляризации бариона ξ . Составленная с его помощью двухрядная матрица плотности может иметь лишь вид

$$\rho \propto 1 + \sigma \xi \quad (153,11)$$

(коэффициент — единица — при $\sigma \xi$ фиксируется требованием, чтобы среднее значение $\sigma = \xi^1$). Подставив (153,11) в (153,10), получим

$$w \propto \text{Sp} (a + b \sigma n) (1 + \xi_1 n) (a^* + b^* \sigma n) (1 + \xi_2^{(d)} n).$$

Вычисление следа (с помощью формул, приведенных в примечании на стр. 262) приводит к результату

$$w \propto aa^* (1 + \xi_1 \xi_2^{(d)}) + bb^* [1 + 2(\xi_1 n)(\xi_2^{(d)} n) - \xi_1 \xi_2^{(d)}] + (a^* b + ab^*) (\xi_1 n + \xi_2^{(d)} n) - i(ab^* - a^* b) (n [\xi_1 \xi_2^{(d)}]). \quad (153,12)$$

Здесь ξ_1 — поляризация начального бариона, $\xi_2^{(d)}$ — выделяемая детектором поляризации конечного бариона, n — направление движения последнего. Формула (153,12) содержит в себе все поляризационные эффекты. Отметим, что при сохранении CP -четности последний член в (153,12) возникает лишь за счет разных фаз амплитуд a и b (153,8), т. е. лишь за счет взаимодействия в конечном состоянии.

§ 154. Нейтральные K -мезоны

Для того чтобы быть различными, частица и античастица должны отличаться друг от друга какими-либо своими квантовыми характеристиками. Во всех известных случаях, за исключением лишь одного, среди этих характеристик имеются строго сохраняющиеся аддитивные величины — электрический заряд или барионное число. Это означает, другими словами, что не существует взаимодействий, в которых такие частица и античастица могли бы переходить друг в друга, и во всех процессах они фигурируют как таковые. Точнее: никакая другая совокупность двух суперпозиций состояний частицы и античастицы не может диагонализировать какое-либо взаимодействие.

Единственным известным исключением являются нейтральные K -мезоны: K^0 и \bar{K}^0 . Эти частица и античастица, не имея элект-

¹⁾ Подчеркнем, что матрица плотности (153,11) не подразумевает в данном случае нерелятивистского приближения для частицы!

рического и барионного зарядов, отличаются лишь гиперзарядом ($Y = 1$ и $Y = -1$). Но гиперзаряд не является строго сохраняющейся величиной: сохраняясь в сильных и электромагнитных, он не сохраняется в слабых взаимодействиях. Поэтому переходы между K^0 и \bar{K}^0 в принципе возможны.

Определим состояния $|K^0\rangle$ и $|\bar{K}^0\rangle$ с таким выбором фаз, чтобы они переходили друг в друга при CP -преобразовании:

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle. \quad (154,1)$$

Переходя в друг в друга, эти состояния не обладают, конечно, определенными CP -четностями. Ими обладают, однако, суперпозиции

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\}, \quad |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\}. \quad (154,2)$$

При строгом сохранении CP -четности переходы между состояниями (154,2) были бы запрещены. Другими словами, эти состояния диагонализировали бы полный гамильтониан, т. е. частицы K_1^0 и K_2^0 обладали бы определенными (различными) массами и временами жизни (*M. Gell-Mann, A. Pais, 1955*).

В частности, K^0 -мезоны фигурировали бы в виде K_1^0 и K_2^0 в распадах, приводящих к возникновению системы частиц с определенной CP -четностью. Таковы, например, распады ¹⁾

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad K_1^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0, \quad K_2^0 = \pi^0 + \pi^0 + \pi^0.$$

В действительности, однако, в распадах K^0 -мезонов наблюдаются нарушения сохранения CP -четности, хотя степень этих нарушений и мала ²⁾. Несохранение CP -четности приводит

¹⁾ Для систем $\pi^+ + \pi^-$ и $\pi^0 + \pi^0$ имеем всегда $CP = +1$. В первом случае это — общее свойство пары частица — античастица со спином 0 (см. задачу к § 13). Во втором случае имеем $C = (+1)^2 = +1$, а $P = +1$, так как для системы из двух тождественных частиц со спином 0 инверсия эквивалентна перестановке частиц, не меняющей знак волновой функции.

Для системы трех псевдоскалярных частиц π^0 их внутренние четности вносят в P множитель $(-1)^3 = -1$. Орбитальную же четность можно найти, построив полный момент системы (совпадающий со спином распадающегося K^0 , т. е. равный нулю) из относительного момента l_{12} пары $\pi^0 + \pi^0$ и момента l_3 третьей частицы относительно этой пары. Поскольку орбитальная четность пары равна $(-1)^{l_{12}} = +1$, то l_{12} — четное число; момент же l_3 должен совпадать с l_{12} для того, чтобы в сумме мог получиться полный момент 0. Отсюда следует, что орбитальная четность системы равна $+1$, а потому $P = (-1)(+1) = -1$. Зарядовая же четность $C = (+1)^3 = +1$, так что $CP = -1$.

²⁾ Так, наблюдается распад $K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, но отношение его амплитуды к амплитуде распада $K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ составляет $\sim 2 \cdot 10^{-3}$. Эта величина, по-видимому, вообще характеризует степень несохранения CP -четности в слабых взаимодействиях.

к возможности переходов между состояниями с $CP = +1$ и -1 . В результате состояния с определенными массами и временами жизни (которые обозначают как K_S^0 и K_L^0) уже не будут совпадать с состояниями (154,2), обладающими определенными CP -четностями¹⁾.

Представим произвольное состояние K^0 -мезона в виде суперпозиции

$$a_1 |K^0\rangle + a_2 |\bar{K}^0\rangle. \quad (154,3)$$

Общий вид уравнений, описывающих изменение этого состояния со временем с учетом взаимных переходов между K^0 и \bar{K}^0 :

$$i \frac{da_i}{dt} = \Lambda_{ik} a_k \quad (i, k = 1, 2). \quad (154,4)$$

Коэффициенты Λ_{ik} составляют двухрядную матрицу, которую в общем случае можно разделить на эрмитову и антиэрмитову части или, что то же, представить в виде

$$\Lambda_{ik} = M_{ik} - i\Gamma_{ik}, \quad (154,5)$$

где обе матрицы M_{ik} и Γ_{ik} эрмитовы:

$$M_{ik} = M_{ki}^*, \quad \Gamma_{ik} = \Gamma_{ki}^*. \quad (154,6)$$

Согласно условию (154,1) преобразование CP заменяет в этих матрицах индексы $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$. Обращение же времени переставляет матричные индексы начального и конечного состояний. Поэтому требование универсальной CPT -инвариантности приводит к равенствам:

$$CPT: M_{11} = M_{22}, \quad \Gamma_{11} = \Gamma_{22}. \quad (154,7)$$

Требование же CP -инвариантности привело бы дополнительно еще и к равенствам

$$CP: M_{12} = M_{21}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21}, \quad (154,8)$$

т. е. ввиду (154,6) M_{12} и Γ_{12} были бы вещественными величинами.

Для стационарных состояний из (154,4) получаются уравнения $a_i \delta E = \Lambda_{ik} a_k$, и отсюда — секулярное уравнение для собственных значений:

$$|\delta E \cdot \delta_{ik} - \Lambda_{ik}| = 0. \quad (154,9)$$

¹⁾ Времена жизни τ «короткоживущего» (K_S^0) и «долгоживущего» (K_L^0) K^0 -мезонов приведены в таблице на стр. 184. Разность же их масс

$$m(K_L^0) - m(K_S^0) = 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ эв} = 0,47 \frac{\hbar}{\tau(K_S^0)}.$$

Оно имеет два комплексных корня, вещественные части которых определяют поправки к массам, а мнимые — коэффициенты затухания (обратные времена жизни) частиц K_S^0 и K_L^0 :

$$\begin{aligned} \delta E_S &= \delta m_S - \frac{i}{2} \gamma_S = \Lambda_{11} + \sqrt{\Lambda_{12} \Lambda_{21}}, \\ \delta E_L &= \delta m_L - \frac{i}{2} \gamma_L = \Lambda_{11} - \sqrt{\Lambda_{12} \Lambda_{21}}. \end{aligned} \quad (154,10)$$

Соответствующие состояния представляют собой (с точностью до нормировочного коэффициента) суперпозиции

$$|K_S^0\rangle = |K^0\rangle + \sqrt{\frac{\Lambda_{21}}{\Lambda_{12}}} |\bar{K}^0\rangle, \quad |K_L^0\rangle = |K^0\rangle - \sqrt{\frac{\Lambda_{21}}{\Lambda_{12}}} |\bar{K}^0\rangle. \quad (154,11)$$

При малой степени несохранения CP -четности (малой величине разности $\Lambda_{12} - \Lambda_{21}$) эти состояния близки соответственно к $|K_1^0\rangle$ и $|K_2^0\rangle$.

Существование двух различных времен жизни приводит к явлению осцилляции чисел частиц и античастиц в пучке K^0 -мезонов.

Пусть в момент $t = 0$ мезон находился в состоянии $|K^0\rangle$. Написав

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |K_S^0\rangle + |K_L^0\rangle \}$$

(небольшим отличием K_S^0 и K_L^0 от K_1^0 и K_2^0 здесь пренебрегаем), найдем, что к моменту времени t состояние будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ & |K_S^0\rangle e^{-im_S t - \frac{1}{2} \gamma_S t} + |K_L^0\rangle e^{-im_L t - \frac{1}{2} \gamma_L t} \} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |K^0\rangle \left(e^{-im_S t - \frac{1}{2} \gamma_S t} + e^{-im_L t - \frac{1}{2} \gamma_L t} \right) + \\ & \quad + |\bar{K}^0\rangle \left(e^{-im_S t - \frac{1}{2} \gamma_S t} - e^{-im_L t - \frac{1}{2} \gamma_L t} \right) \}. \end{aligned}$$

Квадраты модулей коэффициентов при $|K^0\rangle$ и $|\bar{K}^0\rangle$ дают вероятности ω нахождения частиц в этих состояниях. Таким образом, найдем, что

$$\frac{\omega(K^0) - \omega(\bar{K}^0)}{\omega(K^0) + \omega(\bar{K}^0)} = \frac{2e^{-(\gamma_S + \gamma_L)t/2} \cos[(m_L - m_S)t]}{e^{-\gamma_S t} + e^{-\gamma_L t}}. \quad (154,12)$$

Если речь идет о пучке K^0 -мезонов, то вместо вероятностей ω можно говорить о плотностях чисел частиц и античастиц в нем. При этом t надо понимать как время, измеренное в системе покоя K -мезона.

ДОПОЛНЕНИЕ К ЧАСТИ I

§ 82a. Ионизационные потери быстрых частиц

Рассмотрим столкновения быстрой релятивистской частицы с атомом, сопровождающиеся возбуждением или ионизацией последнего. В нерелятивистском случае такие неупругие столкновения были рассмотрены в III, §§ 145, 146; здесь будет дано релятивистское обобщение полученных там формул (Н. А. Bethe, 1933).

Скорость падающей на атом частицы предполагается большой по сравнению со скоростями атомных электронов (тем самым во всяком случае предполагается, что $Z\alpha \ll 1$, т. е. атомный номер не слишком велик). Этим условием обеспечивается применимость борновского приближения к рассматриваемому процессу. Решение задачи несколько различно в зависимости от того, является ли быстрая частица легкой (электрон, позитрон) или тяжелой (мезон, протон, α -частица и т. п.). Мы рассмотрим здесь последний случай, более простой.

Пусть $p = (\epsilon, \mathbf{p})$ и $p' = (\epsilon', \mathbf{p}')$ — начальный и конечный импульсы быстрой частицы в лабораторной системе отсчета, в которой атом до столкновения покоился; разность $q = p' - p$ дает энергию и импульс, передаваемые частицей атому. Разделим весь интервал возможных передач импульса на две области:

$$\text{I) } \frac{q^2}{m} \ll m, \quad \text{II) } \frac{q^2}{m} \gg I, \quad (82a, 1)$$

где m — масса электрона, а I — некоторая средняя атомная энергия (потенциал ионизации атома). Обе области перекрываются друг с другом при $I \ll q^2/m \ll m$; это обстоятельство позволит произвести точную шивку результатов, получающихся для каждой из областей. Будем говорить о значениях q в первой и во второй областях соответственно как о малых и больших передачах импульса.

Малые передачи импульса

В этой области атомные электроны можно считать нерелятивистскими как в начальном, так и в конечном состояниях атома.

Амплитуда процесса дается выражением

$$M_{fi}^{(n)} = e^2 J_{n0}^{\mu}(-q) J_{p'p}^{\nu}(q) D_{\mu\nu}(q), \quad (82a, 2)$$

где J_{n0} — 4-ток перехода атома из начального состояния (0) в конечное (n), а $J_{p'p}$ — 4-ток перехода быстрой частицы; эти токи заменяют здесь собой выражения $(\bar{u}'\gamma u)$, которые стояли бы, например, в амплитуде рассеяния двух «элементарных» частиц — электрона и мюона (74,17) (ср. также (140,3)). Токи перехода берутся в импульсном представлении (см. (43,11)). Сечение процесса в лабораторной системе отсчета:

$$d\sigma_n = 2\pi\delta(\epsilon - \epsilon' - \omega_{n0}) |M_{fi}^{(n)}|^2 \frac{d^3p'}{2|\mathbf{p}'|2\epsilon'(2\pi)^3}, \quad (82a, 3)$$

где $\omega_{n0} = E_n - E_0$ — частота перехода между состояниями атома. Конечное состояние может относиться как к дискретному, так и к непрерывному спектру; первый случай отвечает возбуждению, а второй — ионизации атома. В законе сохранения энергии (учитываемом δ -функцией в (82a, 3)) пренебрежено энергией отдачи атома, что заведомо допустимо при малых передачах импульса.

Фотонный пропагатор удобно выбрать в данном случае в калибровке (77,14), в которой отличны от нуля лишь его пространственные компоненты:

$$D_{ik}(q) = -\frac{4\pi}{\omega^2 - q^2} \left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{\omega^2} \right). \quad (82a, 4)$$

Тогда и для 4-токов перехода в (82a,2) нужны только их пространственные компоненты.

Атомный ток перехода $J_{n0}(q)$ в данном случае есть компонента Фурье обычного нерелятивистского выражения:

$$J_{n0}(q) = \frac{i}{2m} \int e^{-iqr} (\psi_0 \nabla \psi_n^* - \psi_n^* \nabla \psi_0) d^3x, \quad (82a, 5)$$

где ψ_0, ψ_n — атомные волновые функции (причем для упрощения записи мы опускаем здесь и ниже знак суммирования по электронам атома, т. е. пишем формулу так, как если бы в атоме был всего один электрон). Проинтегрировав в первом члене по частям, можно переписать это выражение в виде матричного элемента:

$$J_{n0}(q) = \frac{1}{2} (\mathbf{v} e^{-iqr} + e^{-iqr} \mathbf{v})_{n0}, \quad (82a, 6)$$

где $\mathbf{v} = -\frac{i}{m} \nabla$ — оператор скорости электрона.

Что касается тока перехода рассеиваемой частицы, то ввиду относительной малости теряемого ею импульса ($|q| \ll |p|$) можно заменить его просто диагональным элементом

$$J_{pp}(0) = 2p_z, \quad (82a, 7)$$

отвечающим классическому прямолинейному движению (ср. (96,5)); здесь введен также множитель z , учитывающий возможное отличие заряда частицы (ze) от заряда электрона.

Малость q означает также и малость угла отклонения частицы θ . При этом продольная и поперечная (по отношению к p) компоненты q равны

$$-q_{\parallel} \approx \frac{dp}{d\varepsilon} \omega_{n0} = \frac{\omega_{n0}}{v}, \quad q_{\perp} \approx |p| \theta, \quad (82a, 8)$$

так что $qp \approx -\varepsilon \omega_{n0}$.

Подстановка (82a, 4—8) в (182a, 2) дает

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{4\pi ze^2}{q^2} \langle n | \frac{\varepsilon}{\omega_{n0}} (qv e^{-iqr} + e^{-iqr} qv) + (pve^{-iqr} + e^{-iqr} pv) | 0 \rangle.$$

В первом члене замечаем, что

$$qv f + f qv = 2i\dot{f},$$

где $f \equiv e^{-iqr}$ (см. III, стр. 668); поэтому матричный элемент этого оператора совпадает с матричным элементом $2i(f)_{n0} = 2\omega_{n0} f_{n0}$. Во втором же члене достаточно заменить, ввиду малости q , e^{-iqr} единицей. Тогда

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{8\pi ze^2}{q^2} \{ \varepsilon (e^{-iqr})_{n0} - i p r_{n0} \omega_{n0} \}.$$

Квадрат модуля этого выражения:

$$|M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{64\pi^2 (ze^2)^2}{(q^2)^2} \{ \varepsilon^2 |(e^{-iqr})_{n0}|^2 + 2(qr_{n0})(pr_{n0}) \varepsilon \omega_{n0} + (pr_{n0})^2 \omega_{n0}^2 \} \quad (82a, 9)$$

(во втором члене здесь положено $e^{-iqr} \approx 1 - iqr$; в первом члене этого нельзя сделать по причине, которая выяснится ниже, — см. примечание на стр. 280).

Потери энергии быстрой частицы в результате ее неупругих столкновений с атомами¹⁾ определяются величиной

$$\kappa = \sum_n \int \omega_{n0} d\sigma_n = \frac{1}{16\pi^2} \sum_n \int \omega_{n0} |M_{fi}^{(n)}|^2 d\sigma', \quad (82a, 10)$$

где суммирование производится по всем возможным конечным состояниям атома, а интегрирование — по направлениям рассеянной частицы; будем называть эту величину *эффективным торможением* (ее называют также *сечением потери энергии*).

Интегрирование в (82a, 10) можно произвести в два этапа: как усреднение по азимуту направления p' относительно p и затем интегрирование по $d\sigma' \approx 2\pi\theta d\theta$, где θ — малый угол рассеяния. Первая операция заменяет qr_{n0} на

$$qr_{n0} \rightarrow q_{\parallel} x_{n0} = -\frac{\omega_{n0}}{v} x_{n0},$$

¹⁾ Эти потери часто называют ионизационными, хотя они связаны не только с ионизацией, но и с возбуждением атомов.

где x_{n0} — матричный элемент одной из декартовых координат атомных электронов¹⁾. Интегрирование же по $d\theta$ можно заменить интегрированием по q^2 , заметив, что

$$-q^2 = -\omega_{n0}^2 + q^2 \approx -\omega_{n0}^2 + \frac{\omega_{n0}^2}{v^2} + p^2 \theta^2 = \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{p^2} + p^2 \theta^2 \quad (82a, 11)$$

и потому $2\theta d\theta = d|q^2|/p^2$ (M — масса быстрой частицы). В результате получим

$$\kappa = 4\pi (ze^2)^2 \sum_n \int \left\{ |(e^{-iqr})_{n0}|^2 \frac{\omega_{n0}}{v^2} - \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \left(\frac{M^2}{p^2} + \frac{1}{v^2} \right) \right\} \frac{d|q^2|}{|q^2|^2}. \quad (82a, 12)$$

Нижний предел интегрирования по q^2 :

$$|q^2|_{\min} = \frac{M^2}{p^2} \omega_{n0}^2. \quad (82a, 13)$$

В качестве же верхнего предела выберем некоторое значение $|q^2|_1$ такое, что

$$I \ll \frac{|q^2|_1}{m} \ll m, \quad (82a, 14)$$

т. е. лежащее в области перекрытия областей I и II (82a, 1).

Интегрирование и суммирование в (82a, 12) осуществляется подобно тому, как это было сделано в III, § 146 для нерелятивистского случая. Весь интервал интегрирования разделим еще на две части: а) от $|q^2|_{\min}$ до $|q^2|_0$ и б) от $|q^2|_0$ до $|q^2|_1$, где значение $|q^2|_0$ такое, что

$$\frac{IM}{|p|} \ll \sqrt{|q^2|_0} \ll m\alpha \quad (82a, 15)$$

(величина $m\alpha$, стоящая справа, — порядка величины импульсов атомных электронов). В области а) можно разложить $e^{-iqr} \approx 1 - iqr$, и вклад этой области в κ принимает вид

$$\begin{aligned} 4\pi (ze^2)^2 \sum_n \int_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0} \left\{ \frac{1}{v^2} \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|} - \frac{M^2}{p^2} \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|^2} \right\} d|q^2| \approx \\ \approx \frac{4\pi (ze^2)^2}{v^2} \sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \left[\ln \frac{|q^2|_0 p^2}{M^2 \omega_{n0}^2} - v^2 \right]. \end{aligned}$$

(Интегрирование во втором члене можно распространить до бесконечности.)

¹⁾ Безразлично какой: после подразумевающегося ниже суммирования по направлениям момента атома в конечном состоянии матричный элемент x_{n0} уже не зависит от направления оси x .

Суммирование осуществляется с помощью формулы

$$\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 = \frac{1}{2m} Z, \quad (82a, 16)$$

где Z — число электронов в атоме (см. III (146,10)). Результат представим в виде

$$\frac{2\pi (ze^2)^2 Z}{mv^2} \left[\ln \frac{|q^2|_0 p^2}{M^2 I^2} - v^2 \right], \quad (82a, 17)$$

где I — некоторая средняя атомная энергия, определяемая формулой

$$\ln I = \frac{\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}}{\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2} = \frac{2m}{Z} \sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}. \quad (82a, 18)$$

В области же б) имеем согласно (82a, 11) $|q^2| \approx p^2 \theta^2$, т. е. $|q^2|$ не зависит от номера n конечного состояния атома; не зависят от n также и пределы интегрирования. Поэтому суммирование по n в (82a, 12) можно произвести под знаком интеграла. В первом члене оно осуществляется формулой

$$\sum_n |(e^{-iqr})_{n0}|^2 \omega_{n0} = \frac{Z}{2m} q^2 \quad (82a, 19)$$

(см. III (146,5)), и интеграл от него равен ¹⁾

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \ln \frac{|q^2|_1}{|q^2|_0}.$$

Интеграл же от второго члена в (82a, 12) по этой области дает пренебрежимый вклад в κ .

Складывая последнюю формулу с (82a, 17), находим вклад в κ от всей области малых передач:

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \left[\ln \frac{|q^2|_1 p^2}{M^2 I^2} - v^2 \right]. \quad (82a, 20)$$

Большие передачи импульса

Обратимся к столкновениям с передачей импульса, большой по сравнению с импульсом атомных электронов ($q^2 \gg ml$). В этой области можно, очевидно, пренебречь связью электронов в атоме, т. е. считать их свободными. Соответственно этому

¹⁾ Логарифмическая расходимость интеграла на верхнем пределе есть как раз та причина, по которой в первом члене в (82a, 12) нельзя было разлагать e^{-iqr} по степеням q .

столкновение быстрой частицы с атомом будет представлять собой ее упругое рассеяние на каждом из Z атомных электронов. При этом ввиду большой величины скорости частицы атомные электроны можно считать первоначально покоящимися.

Обозначим посредством $m\Delta$ энергию, передаваемую быстрой частицей атомному электрону, и пусть $d\sigma_\Delta$ — сечение упругого рассеяния с такой передачей. Дифференциальное эффективное торможение на всем атоме будет тогда

$$d\kappa = Zm\Delta d\sigma_\Delta. \quad (82a, 21)$$

Максимальная энергия, которая может быть передана покоящемуся электрону сталкивающейся с ним частицей массы $M \gg m$, равна

$$m\Delta_{\max} = \frac{2mp^2}{m^2 + M^2 + 2m\epsilon} \approx \frac{2mp^2}{M^2 + 2m\epsilon},$$

где ϵ и p — энергия и импульс налетающей частицы (см. II (13,13)). Будем предполагать далее, что энергия ϵ хотя и может быть ультрарелятивистской ($\epsilon \gg M$), но в то же время

$$\epsilon \ll \frac{M^2}{m}. \quad (82a, 22)$$

Тогда даже максимальная передаваемая энергия

$$m\Delta_{\max} \approx \frac{2mp^2}{M^2} = 2mv^2\gamma^2 \quad (\gamma = \epsilon/M = 1/\sqrt{1-v^2}) \quad (82a, 23)$$

остается еще малой по сравнению с первоначальной кинетической энергией падающей частицы ($m\Delta_{\max} \ll \epsilon - M$). Соответственно и передача импульса q остается всегда малой по сравнению с первоначальным импульсом частицы p . Это обстоятельство позволяет считать движение последней меняющимся при столкновении, т. е. рассматривать падающую частицу как бесконечно тяжелую. Тогда сечение рассеяния получится просто преобразованием сечения рассеяния электрона на неподвижном центре (81,7) к лабораторной системе отсчета, в которой электрон первоначально покоился. Это легко сделать, заметив, что в указанном приближении

$$-q^2 \approx q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad d\sigma' = \frac{\pi d|q^2|}{p^2},$$

а относительная скорость в обеих системах — одна и та же v . Формула (81,7) принимает вид

$$d\sigma = \frac{4\pi (ze^2)^2}{v^2} \left(1 - \frac{|q^2|}{4m^2\gamma^2} \right) \frac{d|q^2|}{|q^2|}.$$

Передача энергии Δ выражается через тот же инвариант q^2 согласно $-q^2 = 2m^2\Delta$. Поэтому имеем¹⁾

$$d\sigma_{\Delta} = \frac{2\pi (ze^2)^2}{m^2 v^2} \left(1 - v^2 \frac{\Delta^2}{\Delta_{\max}^2}\right) \frac{d\Delta}{\Delta^2}. \quad (82a, 24)$$

Вклад в эффективное торможение от рассматриваемой области передач импульса получится интегрированием (82a,21) в пределах от введенной выше границы $|q^2|_1$ до $|q^2|_{\max} = 2m^2\Delta_{\max}$. Он равен

$$\frac{2\pi (ze^2)^2 Z}{m v^2} \left(\ln^2 \frac{2\Delta_{\max} m^2}{|q^2|_1} - v^2\right). \quad (82a, 25)$$

Наконец, складывая вклады (82a, 20) и (82a, 25), получим окончательно следующий результат для полных ионизационных потерь быстрой тяжелой частицы:

$$\kappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{m v^2} \left(\ln \frac{2m v^2}{I \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (82a, 26)$$

(в обычных единицах). В нерелятивистском случае отсюда получается прежняя формула III (147,10):

$$\kappa = \frac{4\pi Z (ze^2)}{m v^2} \ln \frac{2m v^2}{I}, \quad (82a, 27)$$

а в ультрарелятивистском случае

$$\kappa = \frac{4\pi Z (ze^2)}{m c^2} \left(\ln \frac{2m c^2}{I \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - 1\right). \quad (82a, 28)$$

Торможение зависит только от скорости (но не от массы) быстрой частицы. Убывание торможения при увеличении скорости согласно (82a, 27) сменяется в ультрарелятивистской области медленным (логарифмическим) возрастанием.

Задачи

1. Определить эффективное торможение релятивистского электрона.

Решение. Вклад области малых передач импульса по-прежнему дается (82a, 20). Для области больших передач вместо (82a, 24) следует воспользоваться формулой (82, 14), учитывающей обменные эффекты. Интегрируя $\Delta d\sigma_{\Delta}$

¹⁾ В этой формуле не учитываются, конечно, специфические эффекты сильных взаимодействий, если тяжелая частица является адроном. Эти эффекты (адронный формфактор), однако, становятся существенными лишь при $|q^2| \infty 1/M^2$, а при условии (82a, 22) такие передачи импульса исключены.

по $d\Delta$ от $|q^2|_1/2m^2$ до $(\gamma - 1)/2$ и складывая с (82a, 20), получаем

$$\kappa = \frac{2\pi Z e^4}{m v^2} \left[\ln \frac{m^2 (\gamma^2 - 1) (\gamma - 1) c^4}{2I^2} - \left(\frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \ln 2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{(\gamma - 1)^2}{8\gamma^2} \right], \quad (1)$$

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

В нерелятивистском случае получаем формулу из задачи к III, § 146, а в ультрарелятивистском ($\gamma \gg 1$)

$$\kappa = \frac{2\pi Z e^4}{m c^2} \left(\ln \frac{m^2 c^4 \gamma^3}{2I^2} + \frac{1}{8}\right). \quad (2)$$

2. То же для позитрона.

Решение. Для $d\sigma_{\Delta}$ в области больших передач следует воспользоваться (82, 23), причем верхний предел по $d\Delta$ равен $\gamma - 1$. Ответ в ультрарелятивистском случае:

$$\kappa = \frac{2\pi Z e^4}{m c^2} \left(\ln \frac{2m^2 c^4 \gamma^3}{I^2} - \frac{23}{12}\right).$$

Продолжение

ПОПРАВКИ К ЧАСТИ I

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
12	5 сн.	$\hbar/m_{\rho}c = 1,321 \cdot 10^{-13}$ см	$\hbar/m_{\rho}c = 2,102 \cdot 10^{-14}$ см
34	12 сн.	§ 59	§ 58
52	18 сн.	L	ψ
68	3 сн.	смешанные (ψ^{0i})	пространственные (ψ^{ik})
68	14 сн.	ψ_{0i}	ψ_{ik}
68	13 сн.	спином 0	спином 1
71	19 сн.		опустить слова «перед первым членом»
94	18 сн.	$-i\gamma\nabla$	$+i\gamma\nabla$
99	ф-ла (22,1)	$+ \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$	$+ \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}$
104	8 сн.	$\rho\sigma/(e-m)$	$\rho\sigma/(e+m)$
106	7 сн.	$e^{-\frac{\varphi}{2}n_1}$	$e^{-\frac{\varphi}{2}v_1}$
116	18, 20, 23, 26 сн.		изменить знак перед членами, содержащими оператор ∇
122	12 сн.	$= \psi_a \tilde{\gamma}^{\mu} \psi_b$	$= \psi_a \tilde{\gamma}^{\mu} \bar{\psi}_b$
133	3 сн.	Уравнение (29,1)	Уравнение (30,1)
145	ф-ла (33,7)	$-\frac{e}{2mc} \sigma H$	$-\frac{e\hbar}{2mc} \sigma H$
148	ф-ла (34,1)	$-\frac{\alpha p^4}{8m^3}$	$-\frac{p^4}{8m^3}$
152	ф-ла (37,4)	$\dots P_l(\cos \theta)$	$\dots] P_l(\cos \theta)$
170	9 сн.	$= k_{\mu} A^{\mu'}$	$= k_{\mu} A^{\mu'} = 0$
170	ф-ла (40,4)	$-iek\hat{A}'] = 0$	$-iek\hat{A}'] \psi = 0$
170	3 сн.	$p_1 = -i \frac{\partial}{\partial x^1}, p_2 = -i \frac{\partial}{\partial x^2}$	$p_1 = i \frac{\partial}{\partial x^1}, p_2 = i \frac{\partial}{\partial x^2}$

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
171	5 сн.	$\partial^{\mu} F = k^{\mu} F$	$\partial^{\mu} F = k^{\mu} F'$
175	6 сн.	III, § 23	II, § 23
178	16 сн.	$2\mu + 2\mu' (e-m)$	$2\mu + 2\mu' (e-m)$
191	ф-ла (46,12)	$ n \nabla_n Y_{jm} ^2$	$ \nabla_n Y_{jm} ^2$
192	ф-ла (46,13)		добавить множитель do в правой стороне равенства
237	1 сн.		
263	ф-ла (61,7)		
211	9 сн.	тонкой	сверхтонкой
232	1 сн.	ψ_{ρ}	ψ_{ρ}^{-}
233	ф-ла (56,8)	$\psi =$	$\psi' =$
242	7 сн.	$\int e^{-xr}$	$\int e^{-xr}$
246	ф-ла (59,13)	(αe)	(αe^*)
247	ф-ла (59,16)	$e^{i\zeta_k r_1}$	$e^{i\zeta_k r_2}$
255	15 сн.	III, § 42	II, § 42
267	12 сн.	$[(z+1)^2 - \gamma^2]$	$[(z^2+1)^2 - \gamma^2]$
275	15 сн.	(63,3)	(63,1)
279	10 сн.	поляризации	поляризуемости
286	ф-ла (65,12)	$d(e_1 + e_2)$	$d(e_1' + e_2')$
287	ф-ла (65,19)	$ M_{fi} $	$ M_{fi} ^2$
295	рис. 7		пунктирная линия s должна быть перпендикулярна оси $s=0$
305	15 сн.	$D_{\Lambda M}^{(j)}(-n)$	$D_{\Lambda M}^{(j)}(-n) \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}$
312	8 сн.	$-u' \tilde{U}_T U^+ u$	$-u' \tilde{U}_T U_T^+ u$
320	ф-ла (73,2)	$\sum_m V_{nm} \dots$	$\sum_m C_m V_{nm} \dots$
326	12 сн.	(74,6)	(74,7)
341	ф-ла (77,11a)	$1/k^2$	$1/(k^2 - m^2)$
348	20 сн.	входящей	выходящей
351	12 сн.	$= \frac{1}{3} (\dots$	$= -\frac{1}{3} (\dots$

Продолжение

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
361	ф-ла (82,5)	$4\pi e^2$	$4\pi e^4$
363	7 сн.	(82,4)	(82,5)
364	ф-ла (82,20)	$r^2/16$	$r_e^2/16$
368	3 св., вторая скобка в ф-ле	$\frac{s^2 + t^2}{u^2}$	$\frac{s^2 - t^2}{u^2}$
395	7 св.	$Q_{\mu\nu}$	$\bar{Q}_{\mu\nu}$
400	10 св.	фотоном	электроном
400	ф-ла (87,24)	$f\xi$	$f\xi d\omega'$
404	ф-ла (88,14)	$d\omega$	$r_e^2 m^2 d\omega$
407	2 св., 19 св.	ортопозитрония	парапозитрония
407	9 св.	парапозитрония	ортопозитрония
409	ф-ла (89,14)	$8e^6/v$	$8e^6/vm^2$
410	9 св.	$8e^6/3v$	$8e^6/3vm^2$
410	18 св.	$4e^6/3v$	$4e^6/3vm^2$
418	18 св.	II, § 70	II, § 69
420	ф-лы (91,4), (91,6)	$A_0^{(e)}(q)$	$A_0^{(e)}(q)$
430	5 сн.	от 0 до $\omega - 2m$	от m до $\omega - m$
436	5 сн.	$2 \cdot 2\pi dz$	$2A \cdot 2\pi dz$
439	11 сн.	p_2	p'_1
449	ф-ла (95,20)	e^{-n}	$e^{-\bar{n}}$
456	16 сн.	$-\frac{m}{\omega'^2} + \frac{m^2}{4\omega'}$	$-\frac{m}{\omega'} + \frac{m^2}{4\omega'^2}$
476	ф-ла (b, 3)	$= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \dots$	$= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \dots$

Стр. 204. Строки 5–13 сверху заменить на следующие:

$$\bar{Q}_{ik}^2 = \frac{6Q^2}{J^2(2J-1)^2} (\bar{J}^2)^2 = \frac{6(J+1)^2}{(2J-1)^2}.$$

Приведенные матричные элементы:

$$\langle J \| J \| J \rangle = \sqrt{J(J+1)(2J+1)}.$$

$$\langle J \| Q \| J \rangle = \frac{Q(J+1)\sqrt{6(2J+1)}}{2J-1}.$$

Из (48,14) видно теперь, что поляризационные моменты $\mathcal{P}_{1\mu}$ совпадают со

сферическими компонентами вектора

$$\sqrt{\frac{3}{J(J+1)}} \bar{J}_i,$$

а моменты $\mathcal{P}_{2\mu}$ — со сферическими компонентами тензора

$$\frac{\bar{Q}_{ik}}{Q} \sqrt{\frac{5}{6}} \frac{2J-1}{J+1}.$$

Стр. 273. На строке 3 сверху вместо $\sim 1/\Gamma (= \hbar/\Gamma)$ должно быть $\sim \Gamma (= \Gamma/\hbar)$; на строке 5 сверху вместо $\sim \Gamma$ должно быть $\sim 1/\Gamma$.

Стр. 293. Подстрочное примечание заменить на следующее:

¹⁾ В общем случае, когда в реакции участвует $n \geq 4$ частиц, число функционально независимых инвариантных переменных равно $3n - 10$. Действительно, имеется всего $4n$ величин — компонент n 4-импульсов q_a . Между ними имеется n функциональных связей $q_a^2 = m_a^2$ и еще 4, даваемых законом

сохранения $\sum_{a=1}^n q_a = 0$. Произвольные значения могут быть приданы 6 величин

— по числу параметров, определяющих общее преобразование Лоренца (общий четырехмерный поворот). Поэтому число независимых инвариантных переменных равно $4n - n - 4 - 6 = 3n - 10$.

Стр. 349. В конце правила 8 (строка 3 сверху) добавить: Если поле постоянно, то внешней линии приписывается 4-импульс $q^\mu = (0, \mathbf{q})$ и ей сопоставляется трехмерная компонента Фурье поля $A^{(e)}(\mathbf{q})$ (связанная в этом случае с четырехмерной компонентой согласно $A^{(e)}(q) = 2\pi\delta(q^0)A^{(e)}(\mathbf{q})$; по оставшимся нефиксированным трехмерным импульсам внутренних линий производится интегрирование по $d^3p/(2\pi)^3$).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ¹⁾

- Адроны 178
- Барионы 182, 186
- Бете—Солпитера уравнение 118, 174
- Брейта система 211
- Вершина четырехфермионная 244, 246
- Вершинная часть 29
- — неприводимая 30
- Внешняя линия эффективная 18, 48
- Внутреннее тормозное излучение 244
- Внутренняя конверсия γ -лучей 288
- Гипероны 187, 230, 269
- Дисперсионное соотношение 53, 75
- — с вычитанием 55, 75, 127
- Затравочный заряд 47, 159
- Изоспином 179
- Инфракрасная асимптотика пропагатора 89
- расходимость 78, 84, 89, 101, 169, 246
- Калибровка Ландау 19, 155, 157
- Кварки 193—196, 230, 265
- Лептоны 232
- Лестничные диаграммы 117, 174
- Локальность слабого взаимодействия 236, 242, 249
- Лэмбовское смещение 105
- — в позитронии 121
- Массовая поверхность 71
- Массовый оператор 24, 41
- Мезоны 182, 184
- Монопольный момент 228, 229
- Нулификация заряда 161
- Параметризация интегралов 99, 149
- Перенормируемость 59, 158
- Полюсные диаграммы 47, 217, 221
- Поляризационный оператор 17
- Поляризация вакуума 41, 64
- — мезонов 67, 82, 112
- Представление Мандельштама 124
- Фарри 39
- Разложение Челлена—Лемана 54
- Распад мезонов 252, 260, 266
- Рассеяние нейтрино на электроне 242, 243
- Расщепление масс 204
- Регуляризация интегралов 58, 83, 132
- Резонансы 187
- Рождение пар электрическим полем 146, 148
- Сечение потерь энергии 279
- Скелетные диаграммы 31
- Собственно-энергетическая часть компактная 17, 24, 32, 41
- — фотонная 17
- — электронная 24
- Спектральная плотность 23
- — двойная 124
- Странность 183
- Странные частицы 182
- Суперспин 194
- Суперспиноры 193
- неприводимые 197, 202
- Супертензоры 199
- Угол Кабиббо 266
- Универсальность слабого взаимодействия 257
- Формфактор зарядовый 212
- магнитный 212
- Функция Спенса 80, 153, 248

¹⁾ Этот указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. В указатель включены термины и понятия, непосредственно не отраженные в оглавлении.